

物理專題研究 學習歷程

1533 25 劉穆霖

目錄

一、聲學	3 ~ 9
二、光學	10~41
三、電學	42~60
四、科展試做	61~89
五、心得	90~

聲學與波動

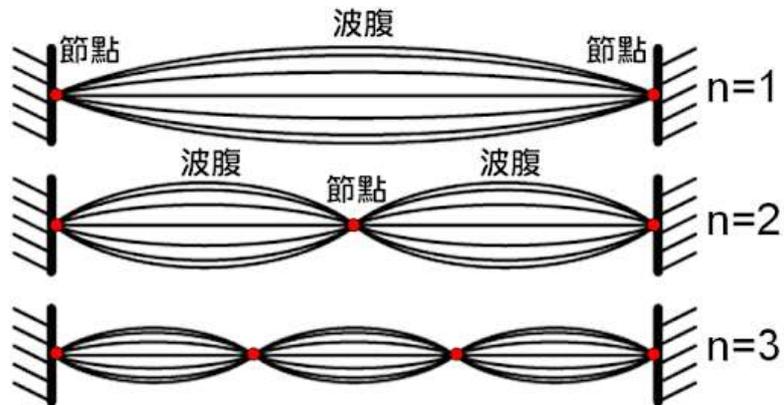
- 一、 駐波
- 二、 拍音
- 三、 荷姆霍茲共振
- 四、 波的干涉

一、駐波：

駐波（英語：standing wave 或 stationary wave）為兩個波長、週期、頻率和波速皆相同的正弦波相向行進干涉而成的合成波。與行波不同，駐波的波形無法前進，因此無法傳播能量，故名之。駐波通過時，每一個質點皆作簡諧運動。

各質點振盪的幅度不相等，振幅為零的點稱為節點或波節（英語：Node），振幅最大的點位於兩節點之間，稱為腹點或波腹（英語：Antinode）。^[1]由於節點靜止不動，所以波形沒有傳播。能量以動能和位能的形式交換儲存，亦傳播不出去。兩列傳播方向相反的相干波相遇而產生干涉，或介質沿波速的相反方向運動時，均可產生這個現象。

駐波示意圖：

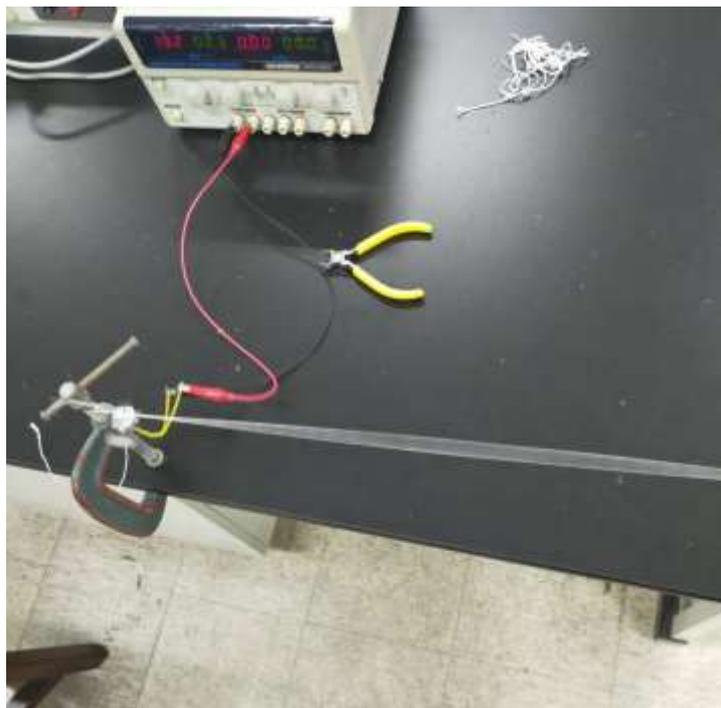


(圖源：通訊博物館)

駐波實驗：製作駐波產生器，觀察駐波的形成及特徵。

觀察實驗現象：以下是我做出自製駐波產生器後，觀察到的駐波現象。

實驗裝置：此實驗利用馬達旋轉帶動細繩，調整頻率使產生駐波。





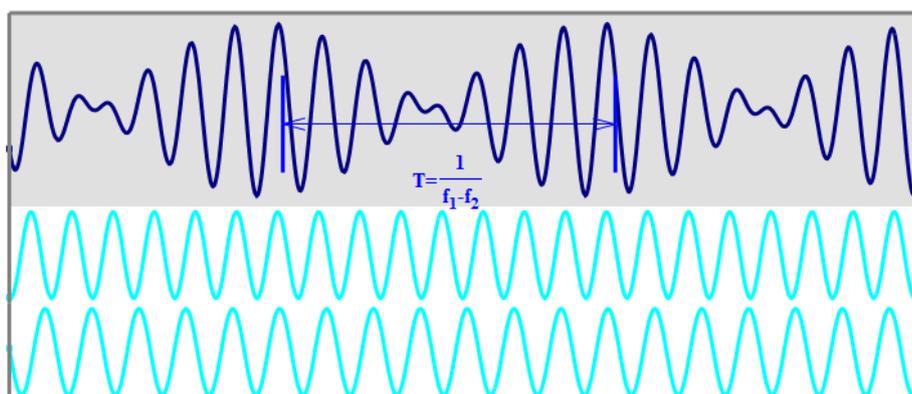
此實驗經由調整電源供應器及繩張力，即可觀察到不同波數的駐波情形。在上圖中，顯示的是當 $n = 3$ 時的情形。而實驗裝置圖顯示的則為 $n = 1$ 時的情形。而我觀察到的駐波皆像上述的描述，波並未向某方向傳遞，而是各質點皆上下做簡諧運動，使波在原地不傳播。

二、拍音

拍音（英文：beat note、beat frequency）一詞源於聲學上兩個頻率相近但不同的聲波的干涉，所得到的干涉訊號的頻率是原先兩個聲波的頻率之差的絕對值，因此也叫做差頻。這個概念也用到了光學和電子學中，指兩個頻率不同的訊號進行合波後得到頻率為兩者之差的新訊號。

我們利用二相近之頻率，進行疊加之後，會發現產生響度忽大忽小的情形，此情形即為拍音。我們又利用了音響，分別在左右兩側播放頻率相近但不相同的聲波。結果，我們就可以感受到播放出來的聲波響度隨著時間忽大忽小。

下為拍音示意圖：

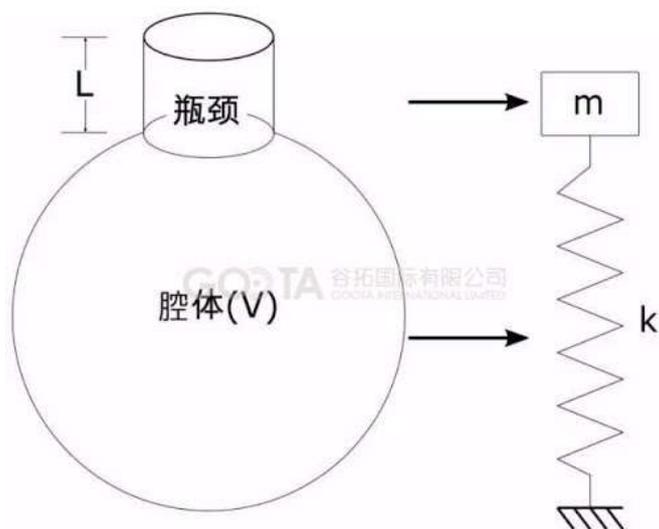


(圖片來源：DigiLog 聲響實驗室)

下二淺藍波為原本發出之頻率相近的波，上面深藍波則為前二波合成後之新波。觀察新波之波型，能看到振幅高低起伏，也就是聲響忽大忽小。

三、荷姆霍茲共振：

荷姆霍茲共振 (Helmholtz resonance) 指的是空氣在一個腔中的共振現象，例如在一個空瓶子的瓶口吹氣引起的共振。



(圖片來源：廣州谷拓材料公司)

假設瓶口截面積 A ，空氣密度 ρ ，空氣傳聲速率 u 。

我們可將振動情形視為一質量 m 之物體於彈性係數 k 之彈簧上做簡諧運動。

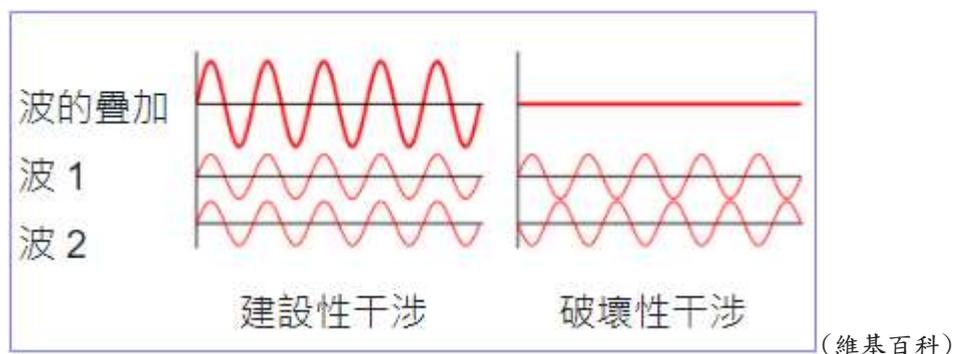
我們最終能得到荷姆霍茲共振頻率 $f = \frac{u}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{VL}}$ 。

我們在這次介紹中認識了這種振動方式，並且知道了關於它的理論。

四、波的干涉：

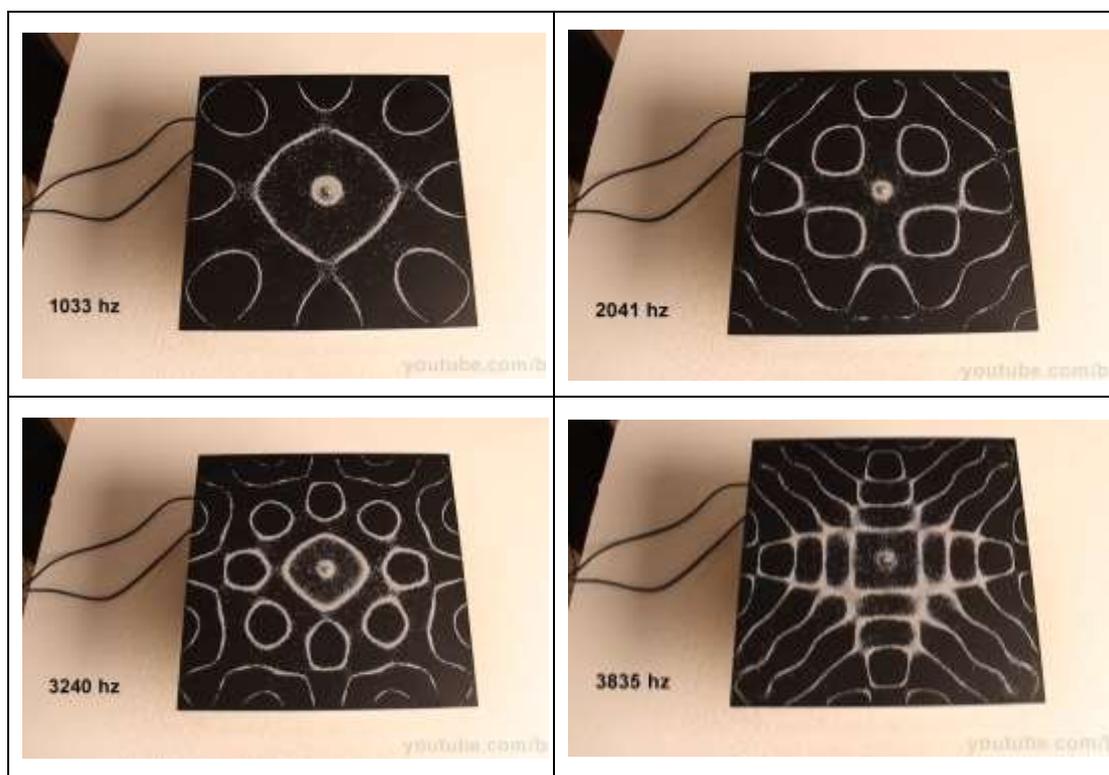
干涉（interference）在物理學中，指的是兩列或兩列以上的波在空間中重疊時發生疊加，從而形成新波形的現象。兩列波在同一介質中傳播發生重疊時，重疊範圍內介質的質點同時受到兩個波的作用。若波的振幅不大，此時重疊範圍內介質質點的振動位移等於各別波動所造成位移的向量和，這稱為波的疊加原理。若兩波的波峰（或波谷）同時抵達同一地點，稱兩波在該點同相，干涉波會產生最大的振幅，稱為建設性干涉；若兩波之一的波峰與另一波的波谷同時抵達同一地點，稱兩波在該點反相，干涉波會產生最小的振幅，稱為破壞性干涉。

建設性及破壞性干涉示意圖：



老師在我們專研課時，利用教室內兩個音響，製造出干涉的效果。然後讓我們在教室內走動，觀察所發出聲音的現象。我們就很明顯的感受到教室內有些地方聲響較大；而其餘地方聲響較小。這就是當波進行干涉時，所產生的建設性干涉及破壞性干涉。

網路上也有很多關於干涉及波紋的實驗影片。例如很有名的克拉尼圖形，即為各頻率下振動產生的圖形。



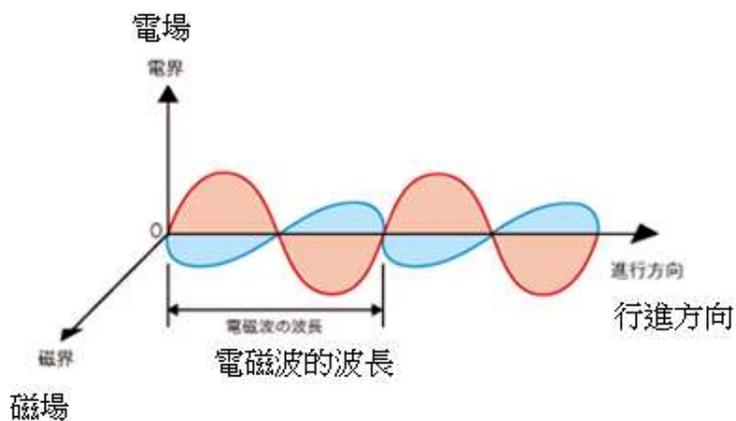
(影片來源：<https://www.youtube.com/watch?v=WzCULZo-t4c>)

光學

- 一、光的偏極與偏振片
- 二、馬呂士定律
- 三、布魯斯特角
- 四、膠帶的旋光性
- 五、單狹縫、雙狹縫相關實驗
- 六、光譜及光譜儀實驗
- 七、實驗：測量光碟片容量

一、光的偏極與偏振片：

光的偏極：

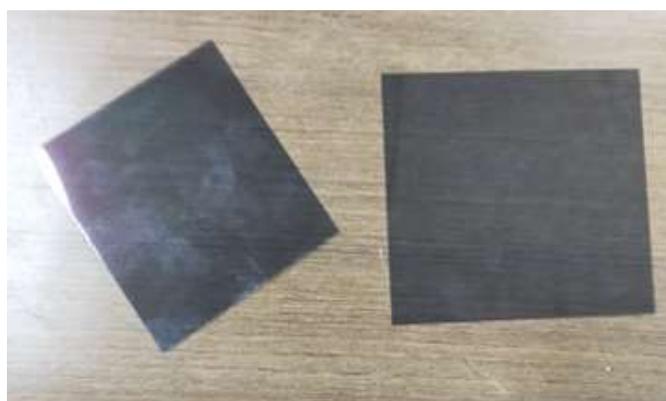


(圖源：台灣東洋公司)

光是電磁波的一種，而光在行進時，其相對應之電場及磁場也會跟著前進。而電場之波動振幅方向即為光的偏振方向。我們可以利用偏振片，檢驗光的偏振方向。

偏振片原理：

以下圖片即為偏振片的實貌：



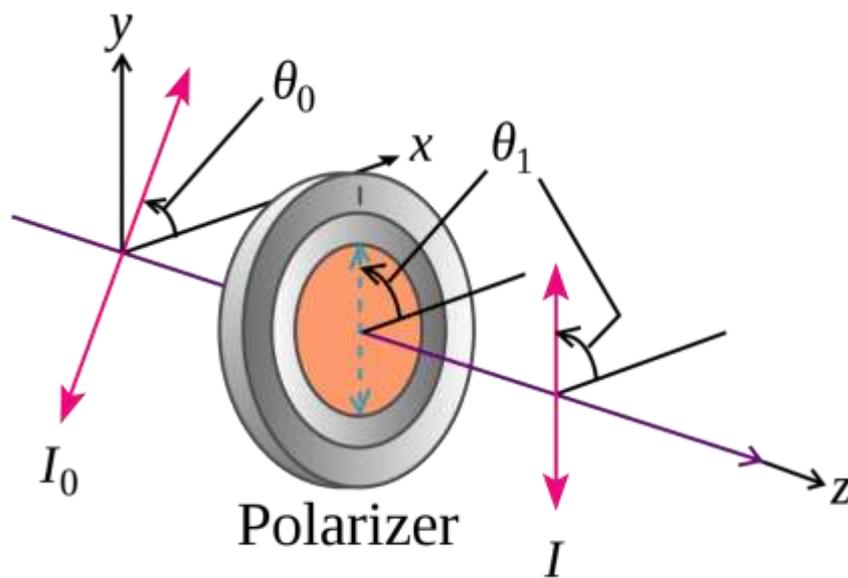
原理：偏振片中的分子以化學長鏈單向構成，當光通過偏振片時，若偏振片方向與光偏極方向平行，則光就可順利通過；反之，若二者方向垂直，則偏振片分子會將光產生之電場吸收，因此而發不出光。我們就利用了偏振片的特殊現象，製作實驗來驗證光學定律。

偏振現象：

	
<p>偏振方向互相垂直，無法發光</p>	<p>偏振方向互相平行，可以發光</p>

二、馬呂士定律：

示意圖：



(維基百科)

定律說明：馬呂士定律 (Malus' law) 表明，照射偏振光於偏振片，則透射光的輻照度 I 為 $I_0 \cos^2 \theta_i$ ；其中， I_0 是入射光的輻照度， $\theta_i = \theta_1 - \theta_0$ ，是入射光的偏振方向與偏振片的傳輸軸之間的夾角。馬呂斯定律是因法國工程師艾蒂安-路易·馬呂士而命名。

理論推導：令二偏振片夾角 θ ，光發出電場能量 E_0 。當光在第二片偏振時，光能量為 E_0 ；當通過第二片時，偏振片會將法線方向之電場阻擋住，只留下切線方向的分量，即為 $E_0 \cos \theta$ 。又光照射強度 $I \propto E^2$ ，因此 $I = I_0 \cos^2 \theta$ 。

驗證馬呂士定律之實驗：

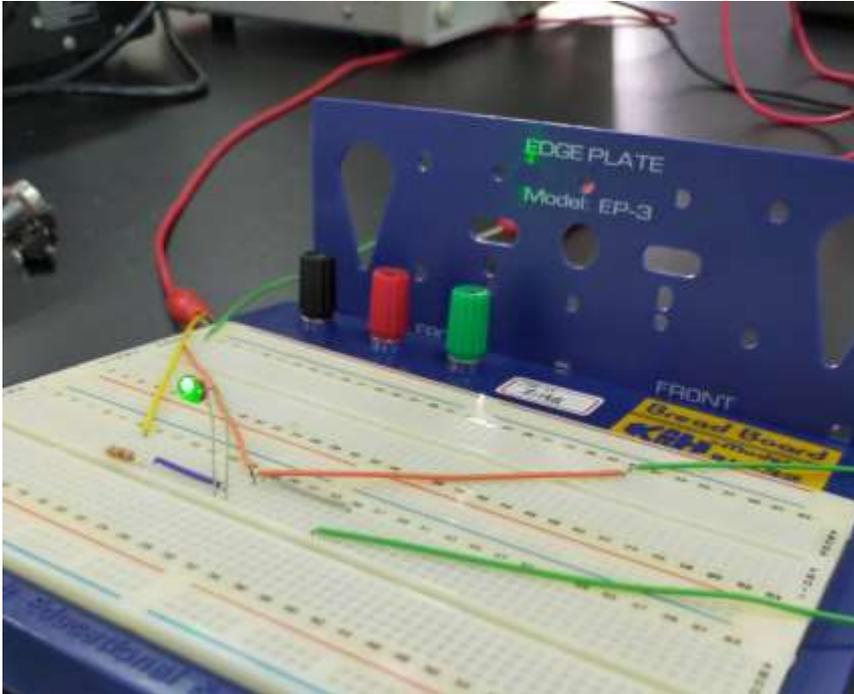
我們設計了以下實驗，用來驗證馬呂士定律的正確性。

實驗架設：



我們於左側架設雷射發射器；中間擺放支架，用來架設偏振片；再於右端放上自製電路，其中的光敏電阻用來偵測光強度。

自製電路如下：



先將自製電路連接電源供應器(電壓 5V)，形成迴路；後將光敏電阻兩端連接三用電表，測量電壓值。

實驗原理：

光敏電阻的性質為，當光照越強，則電壓越小；反之則越大。

因此可得知，在光敏電阻中， $I \propto \frac{1}{R}$ ---(1)；

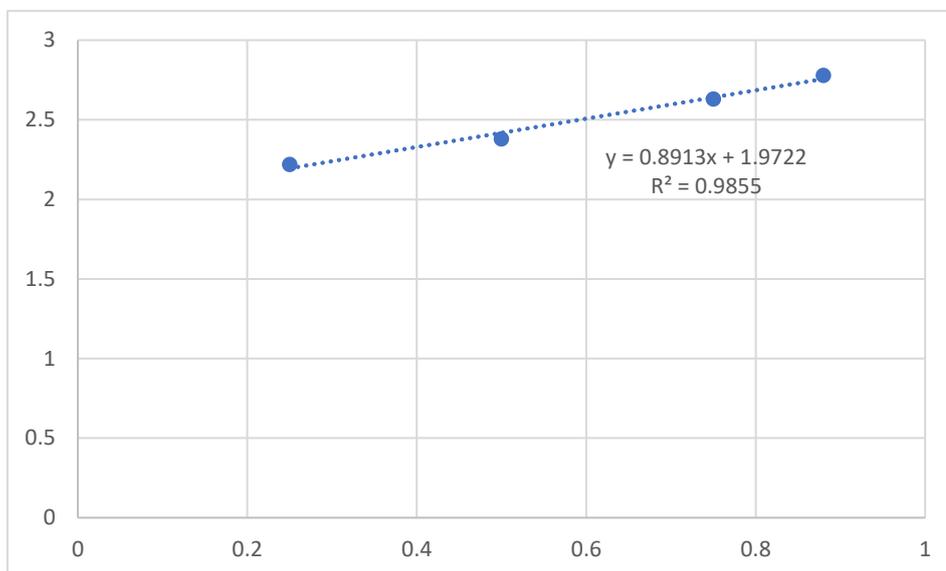
又因 $V = I \times R \Rightarrow V \propto R$ ---(2)。

結合(1)與(2)，即為 $I \propto \frac{1}{V}$ 。

我們即可利用此項結果，由三用電表測量電壓，將 $\frac{1}{V}$ 對 $\cos^2\theta$ 作圖，產生的結果應與 I 對 $\cos^2\theta$ 作圖之結果類似。因此可驗證馬呂士定律的結果是否正確。

實驗結果：

下表為測量出之結果，縱軸為 $\frac{1}{V}$ ，橫軸為 $\cos^2\theta$ 。

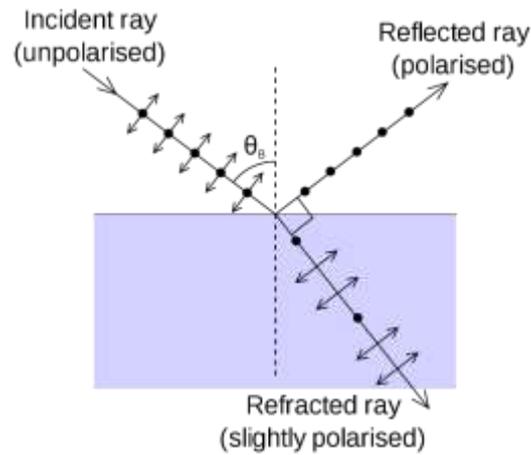


由表可發現這次實驗的準度偏高，代表實驗進行的算是成功；而從實驗結果發現，光強度 I 真的和 $\cos^2\theta$ 成正比。

三、布魯斯特角：

介紹：布魯斯特角（Brewster's angle），又稱為起偏振角，當入射自然光以此角度射入介面時，反射光是線偏振光，並且與折射光線互相垂直。此角度是以蘇格蘭物理學家大衛·布魯斯特（1781年 - 1868年）命名的。

示意圖：



(維基百科)

理論：

令入射角=反射角= θ_b ；折射角 θ ；上介質折射率 n_1 ；下介質折射率 n_2

由上圖知， $\theta_b + \theta = 90^\circ \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta_b$ ；

又斯乃爾定律有： $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ 。

將上列數據代入，得：

$$\Rightarrow n_1 \times \sin\theta_b = n_2 \times \sin\theta ;$$

$$\Rightarrow n_1 \times \sin\theta_b = n_2 \times \cos\theta_b ;$$

$$\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_b}{\cos\theta_b} = \tan\theta_b ;$$

$$\Rightarrow \theta_b = \tan^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) 。$$

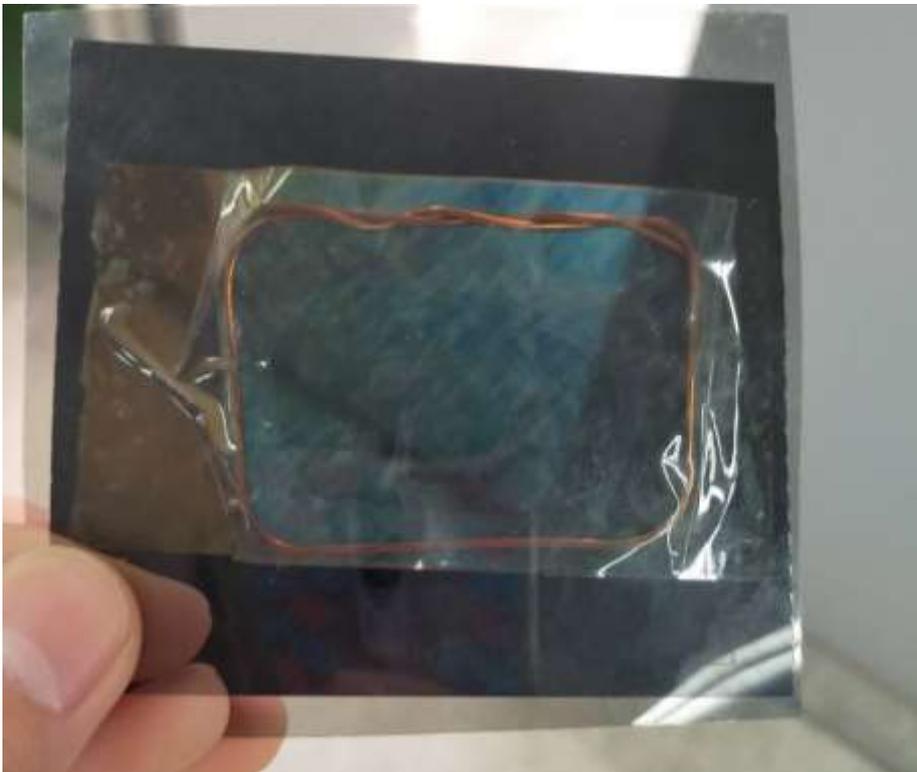
我們即可利用此公式，找出各環境下相對的布魯斯特角。

四、膠帶的旋光性：

旋光性：光通過某些物質，偏振面發生了旋轉，這個現象稱為旋光現象。這些物質所具有的這種性質即為旋光性。

我們發現，膠帶是一具有旋光性之物體。於是我們利用膠帶及偏振片，來觀察旋光的現象。

此為膠帶旋光之現象：



在只有二偏振片重疊的區域，因為偏振片自身的偏振性，而透不出光線，因此顯現黑色；相反的，若是在中間有加上膠帶的區域，因為膠帶在中間旋光，因此有一部份光可從偏振片中透出，所以可看到藍色。我們可以利用這種有趣的性質，貼上多層膠帶，設計花樣，使得看過去時透出色彩繽紛的造型。

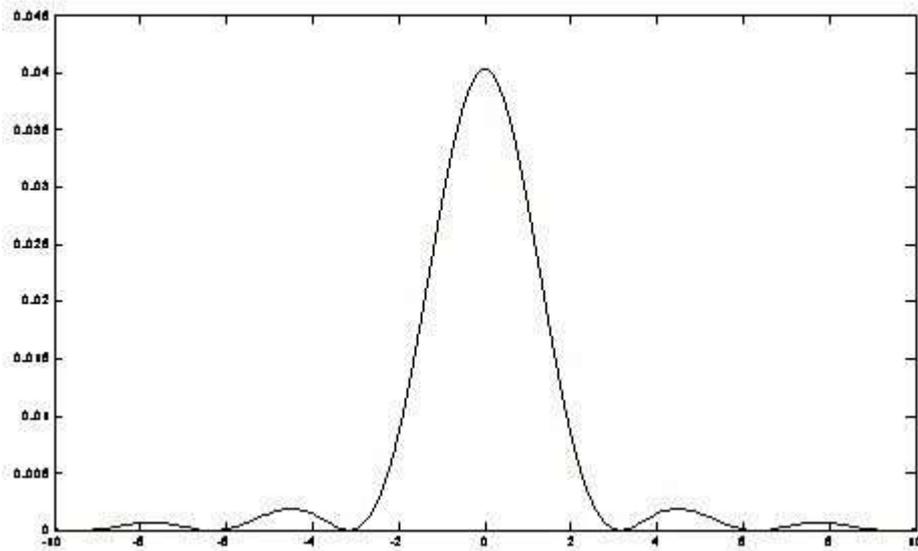
五、狹縫相關實驗及理論：

一、現象介紹：

1. 單狹縫繞射：

繞射（英語：diffraction），又稱衍射，是指波遇到障礙物時偏離原來直線傳播的物理現象。在古典物理學中，波在穿過狹縫、小孔或圓盤之類的障礙物後會發生不同程度的彎散傳播。假設將一個障礙物置放在光源和觀察屏之間，則會有光亮區域與陰暗區域出現於觀察屏，而且這些區域的邊界並不銳利，是一種明暗相間的複雜圖樣。這現象稱為繞射，當波在其傳播路徑上遇到障礙物時，都有可能發生這種現象。除此之外，當光波穿過折射率不均勻的介質時，或當聲波穿過聲阻抗不均勻的介質時，也會發生類似的效應。

單縫繞射：老師在課堂上，講解了單縫繞射的方程式，以及大略之圖形。以下為圖形：



(圖源：隨意窩)

以及方程式： $I = I_0 \times \frac{\sin^2(\frac{\pi by}{r\lambda})}{(\frac{\pi by}{r\lambda})^2}$ 。在方程式中 I 為光強度、 I_0

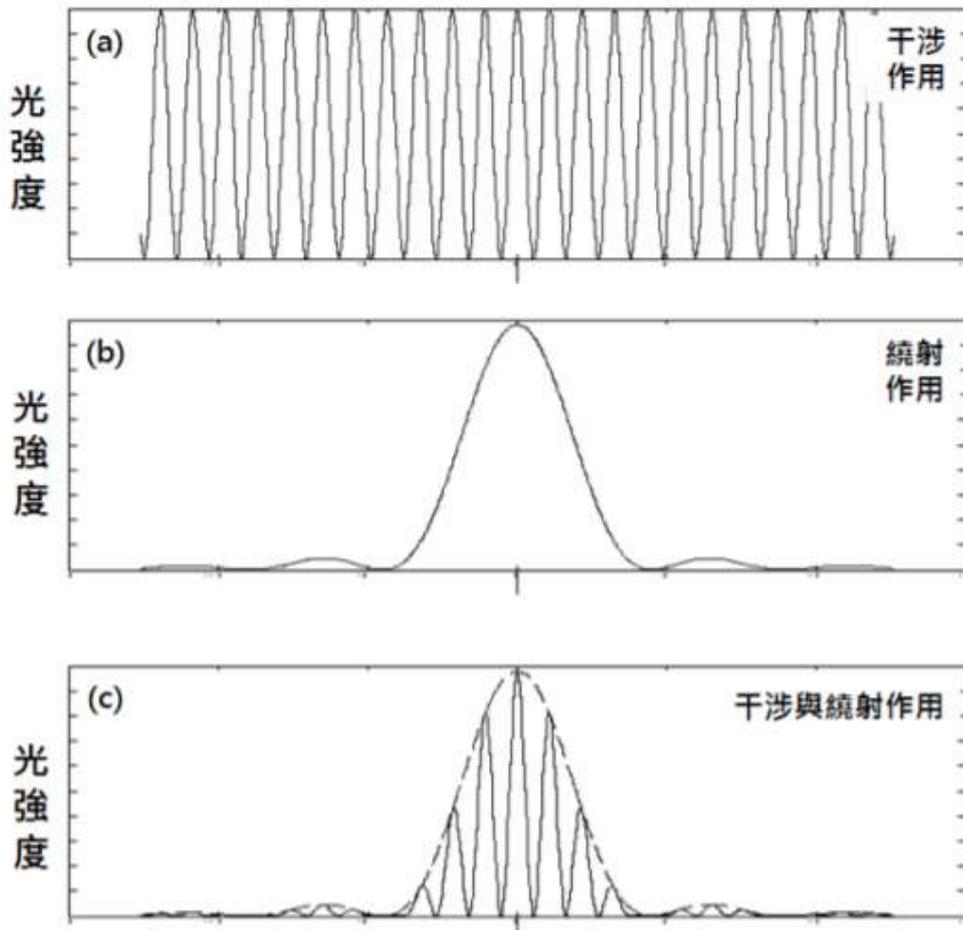
為最大光強、 b 為狹縫寬、 y 為水平距離、 r 為狹縫至屏幕距離、 λ 為射入光之波長。

我們想藉這次實驗，觀察單狹縫繞射之現象，以及求出狹縫寬 b 是否符合理論值。

2. 雙狹縫干涉及繞射：

干涉現象已於波動單元提及；此處不再重新列出。

雙狹縫干涉及繞射圖片：



(圖源：交通大學物理實驗手冊)

圖(a)為理想雙狹縫干涉圖形，圖(b)為單狹縫繞射圖形，而圖(c)則為現實中，雙狹縫干涉之圖形。因雙狹縫實驗時，會受單狹縫繞射效應之影響，最終成為圖(c)之圖樣。

(圖(c)的結果，實為(a)與(b)相乘之結果)

於是，我們也來實際觀察，光經過雙狹縫之後的現象。

3. 光柵：

老師在課堂上，提到了光柵。光柵即為眾多狹縫緊密連在一起，製作成的小板子。接著我們就實際使用光柵，觀察雷射光通過光柵後，會呈現的樣貌。

下圖為我們實際觀測到的光柵情形：



會發現光散成許多個小點，投射在實驗室後的牆壁。且各個光點散佈的距離似乎相等。

4. “頭髮絲干涉”：

什麼是頭髮絲干涉？意思就是，將一極細之細絲(例如髮絲)固定於支架上，並發射光束，觀察光通過細絲後，產生之現象。我們欲觀察此現象，求出細絲之細度。

二、各項實驗：

1. 單狹縫繞射實驗：

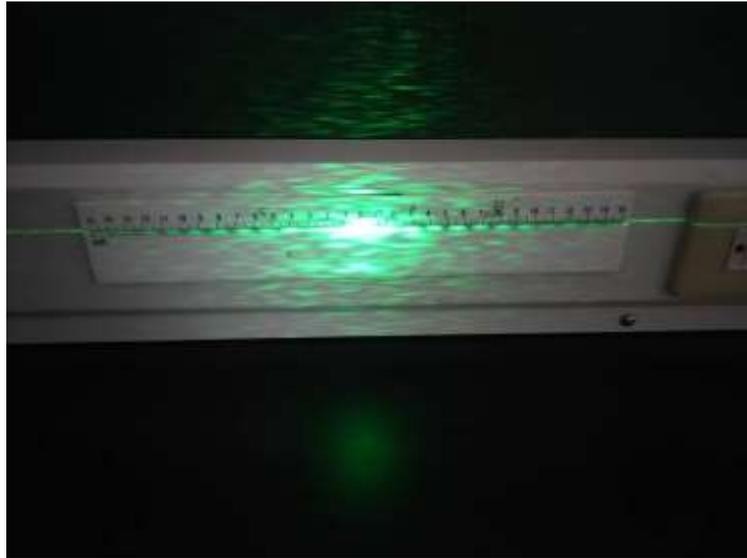
實驗裝置：



實驗步驟：

- (1) 架設實驗裝置，並記錄此時的 r 值
- (2) 開啟雷射，觀察並記錄在屏幕產生之圖樣
- (3) 將記錄下之圖樣，利用電腦軟體(Image J、Excel)分析，將結果製圖產出

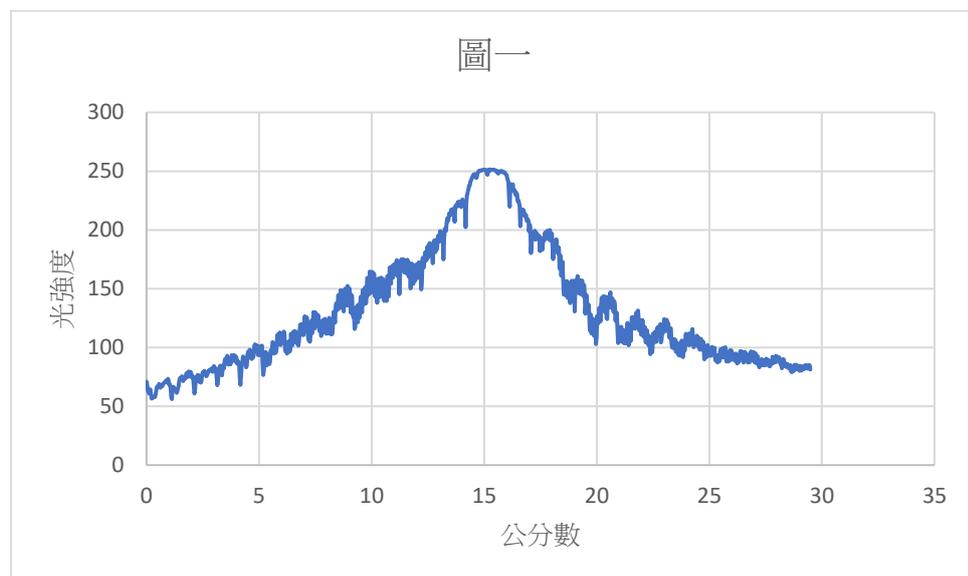
實驗記錄：



此為我拍到的照片，紀錄單狹縫繞射的情形。由觀察到的圖樣，能發現單狹縫中央亮紋的地方是最亮的，以及在左右兩側，有亮暗紋交替出現的情形。這個現象與理論上產生的情形大致符合。

實驗結果：

此為我經過分析後，做出的圖表：



由此，我們就可推算 Δy ，經由上提及之公式，算出狹縫寬與狹縫片上之寬度進行比較。

由中央亮紋之間的距離進行推算：

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{2r\lambda}{b}$$

且已知量有： $\Delta y = 5.75\text{cm}$ 、 $r = 138\text{cm}$ 、

在網路上查得半導體雷射光波長

$$\lambda = 532\text{nm} = 532 \times 10^{-9}\text{m} = 5.32 \times 10^{-5}\text{cm}。$$

$$\text{將已知量代入，可得：} 5.75 = \frac{2 \times 138 \times 5.32 \times 10^{-5}}{b}$$

$$\Rightarrow b = 2.55 \times 10^{-3}\text{cm} = 2.55 \times 10^{-2}\text{mm}$$

$$\approx 0.02\text{mm}。$$

誤差討論：

此結果與狹縫片上之數據(0.1mm)相差不大，相差 0.08mm

，代表實驗過程以及分析過程並未與實際結果差太多。

另外，最後分析出之圖形與理論圖形稍有差別，原因可能

為：雷射餘光影響實驗結果、環境光造成誤差，以及拍攝

繞射圖形時的角度差，使得實驗圖形不太準確。

2. 雙狹縫干涉及繞射：

實驗裝置：

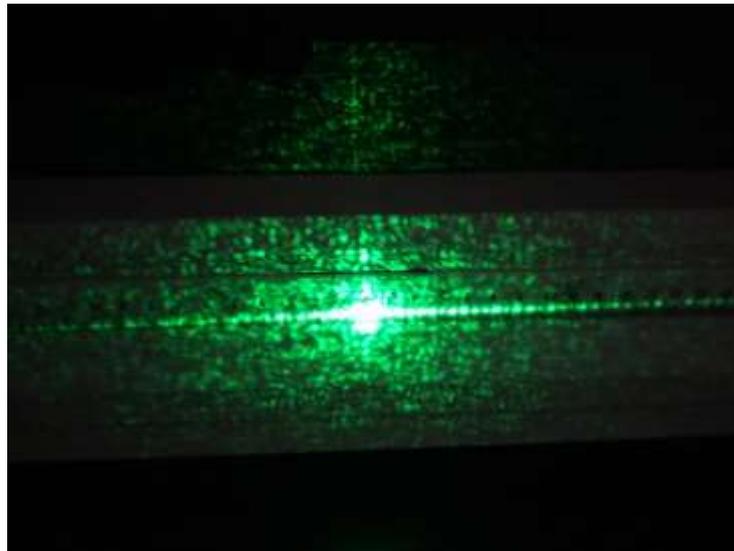
雙狹縫實驗之實驗裝置與上同，僅將單狹縫片改為雙狹縫片；以及改變狹縫片至屏幕距離。

實驗步驟：

實驗步驟亦與上同，利用相同之裝置觀測雙狹縫之情形。

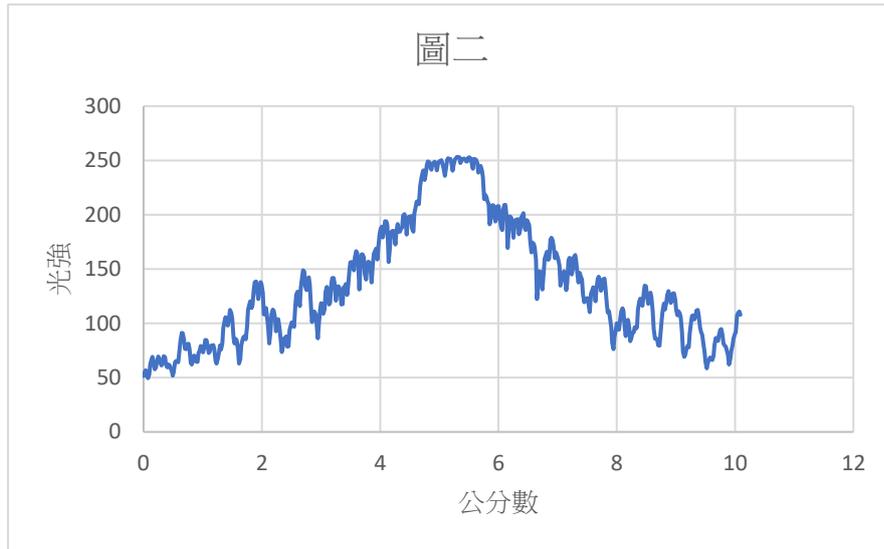
實驗記錄：

雙狹縫產生之情形如下



會發現，與單狹縫產生之情形類似，但是亮暗紋分布的更緊密。跟理論圖形亮暗分布也非常類似。

實驗結果：



此為我記錄下之圖表。同樣利用中央亮紋之長度進行計算

二狹縫寬。

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{r\lambda}{d}$$

$$\Rightarrow 0.3 = \frac{140 \times 5.32 \times 10^{-5}}{d}$$

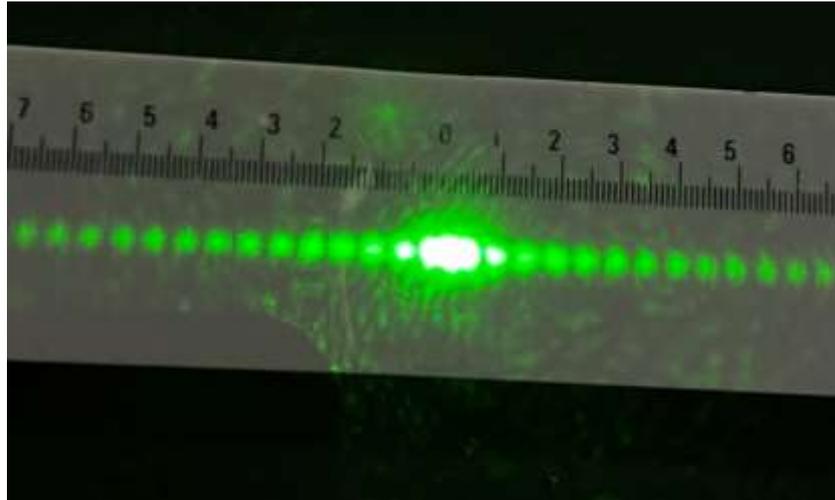
$$d = 0.02cm = 0.2mm$$

誤差討論：這次實驗就做的較為準確，計算出的 $d(0.2mm)$

與實際 $0.3mm$ 相差小，表示我這次實驗結果算是成功。

3. 頭髮絲干涉：

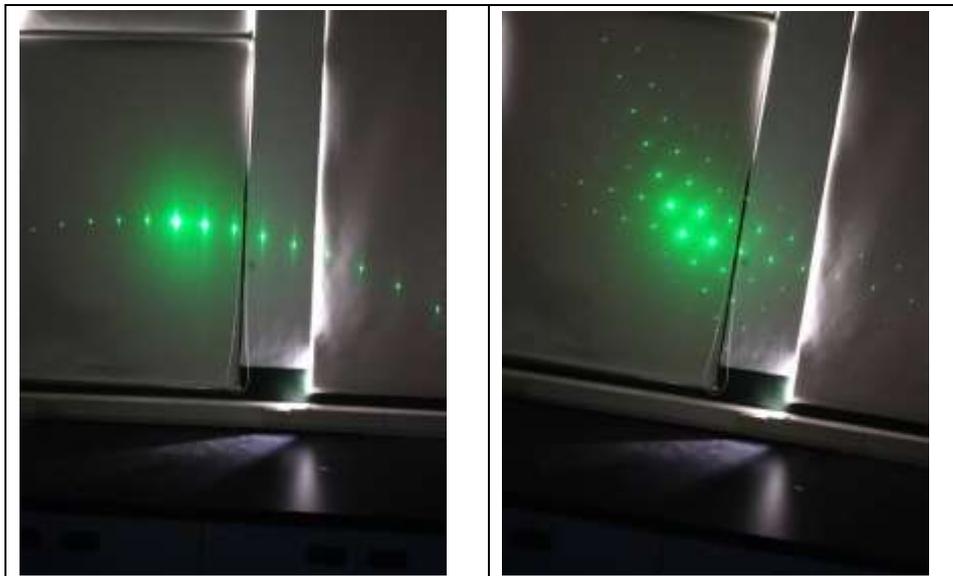
以下為經過細絲干涉後，在屏幕顯示之圖樣。

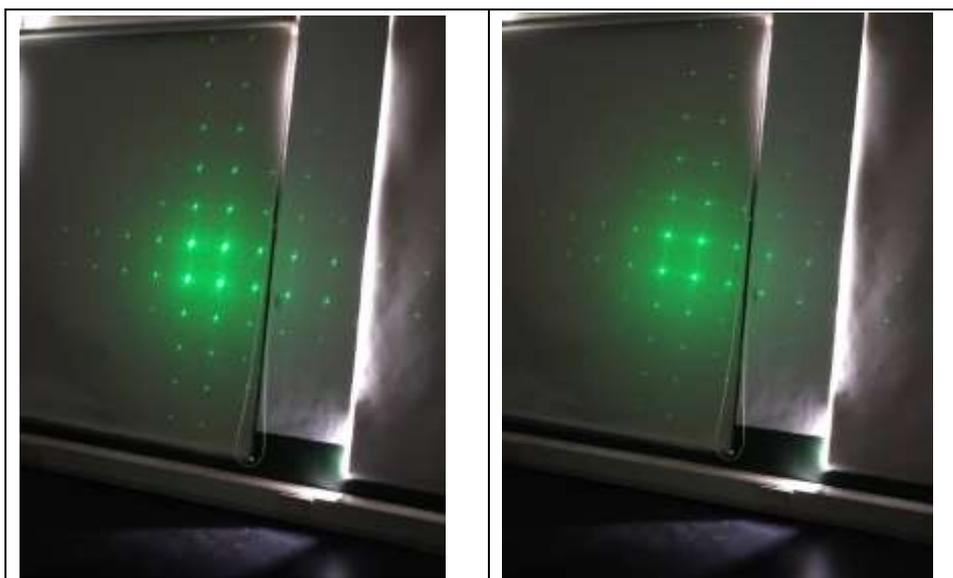


會發現，這結果與雙狹縫實驗之結果較類似。

1. 我們在實驗時，發現光若與光柵夾角並非垂直，會產生有趣的現象。例如通過的光居然會變成圓弧狀等。

以下為圖片：



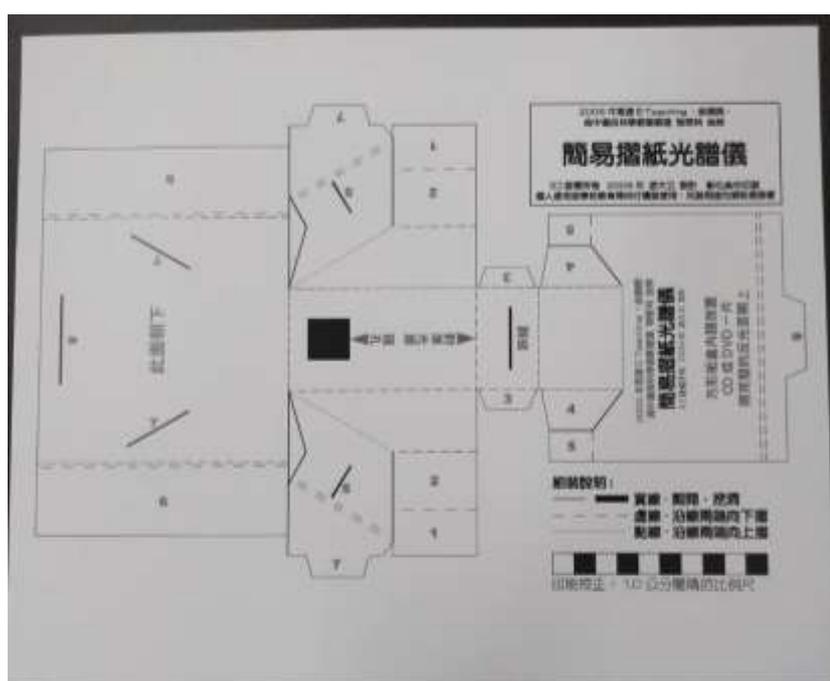


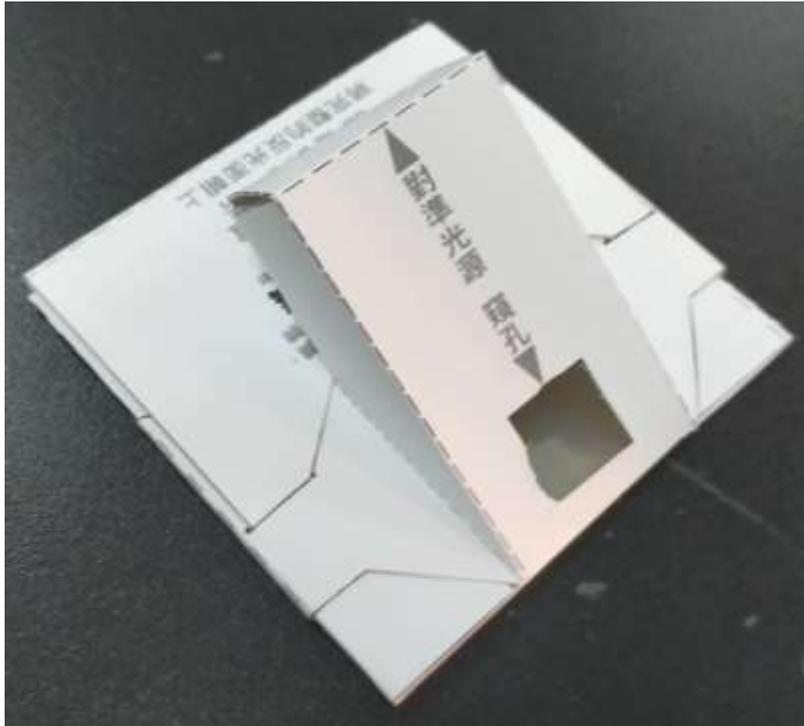
六、光譜及光譜儀：

我們使用三種光譜儀進行觀測：自製簡易光譜儀、一般式光譜儀、以及 Pasco 的光譜儀。

1. 自製光譜儀：

我們實作自製光譜儀，試著利用自製光譜儀，觀測到光譜。





此為最後之成品，光能經過自製光譜儀上之狹縫，射入位於窺孔下方之 CD 片。又因為 CD 片反面之結構類似於反射式光柵，即可利用此性質，使得光經由反射後，能發散成光譜的樣子呈現在窺孔上。

2. 一般式光譜儀：

此原理和自製光譜儀基本相同，我們也可從孔中，觀測到光發散的現象。此二種光譜儀，可將觀測結果拍下，再經過電腦分析，產出光譜結果。

3. Pasco 光譜儀：

將此光譜儀架設好，並連接電腦，即可利用光譜儀上之偵測頭，經由軟體直接將光譜呈現至電腦上。

實驗一：利用各種方法，測量出各種光之光譜。

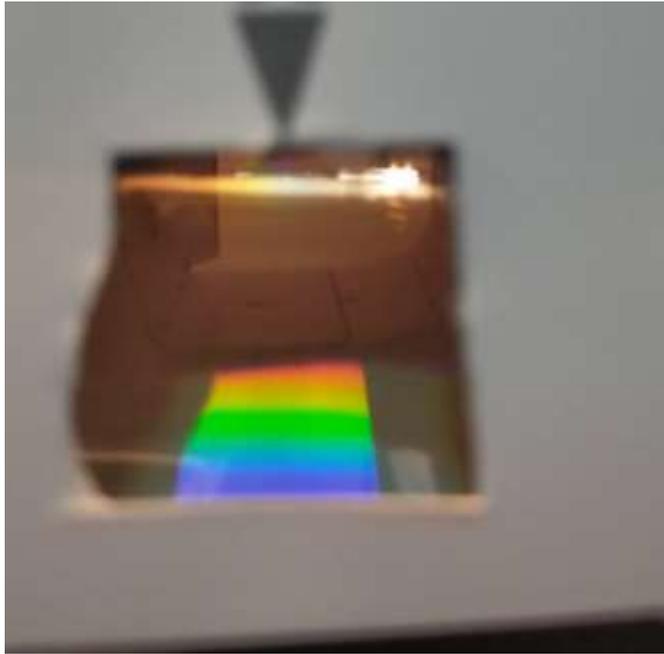
我們所測試之光源有：鎢絲燈泡、省電燈泡、及各種氣體之激發光



如上，為各種氣體管。利用高壓電，激發其中粒子，即可觀察到如圖中發出之光。再利用光譜儀和電腦，製出光譜。

一、自製光譜儀：

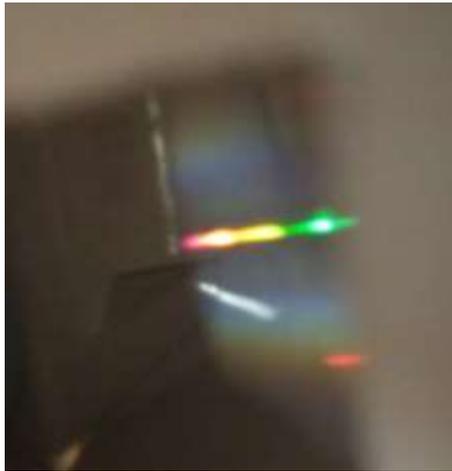
我利用自製光譜儀，觀測以上之光源；此為我經過此光譜儀，所見到之現象。



鎢絲燈產生之光



省電燈泡產生之光

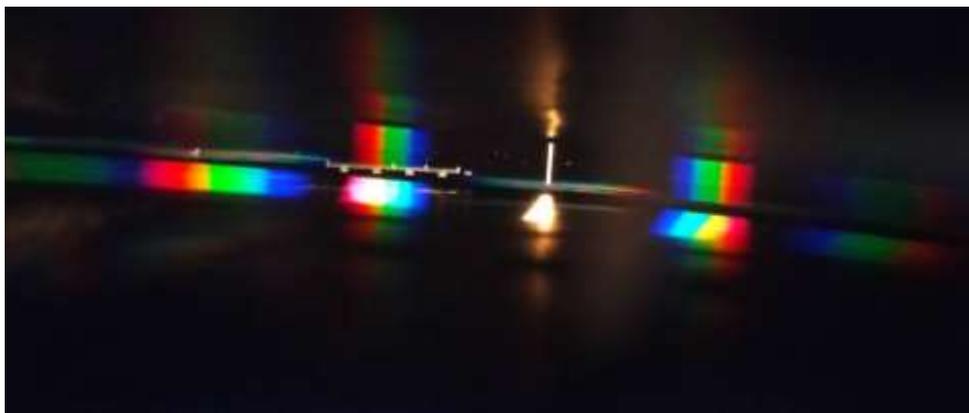


氮氣產生之光

我發現，利用自製光譜儀，產出之光效果皆不太好。原因可能為：CD 的反光效果不佳、CD 有磨損、狹縫製作時受損等。

二、一般光譜儀：

一般光譜儀的效果較自製光譜儀佳一些。但在觀測氣體激發光時，效果變得較不佳。



鎢絲燈泡



省電燈泡

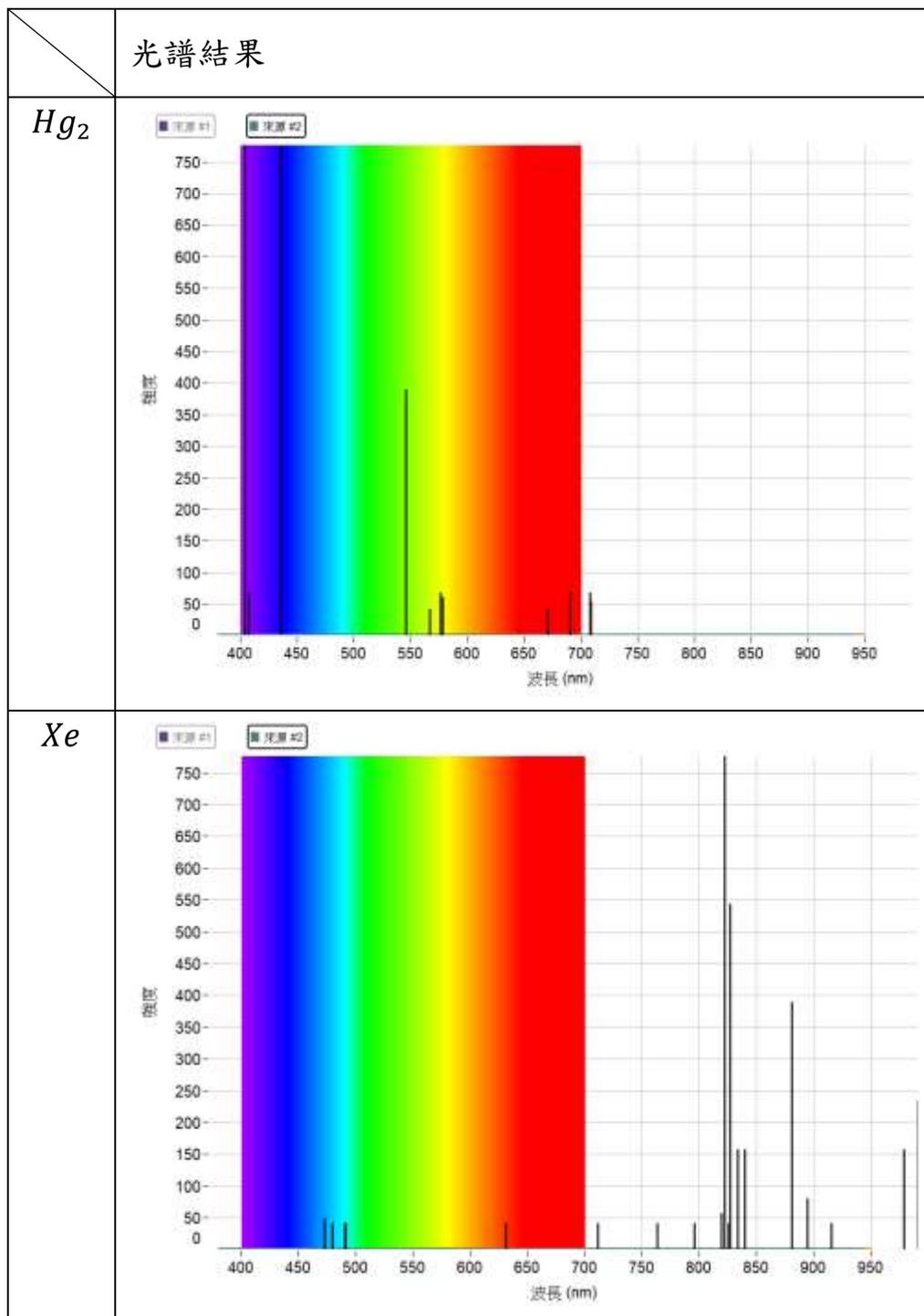
三、Pasco 光譜儀：

因前兩種光譜儀觀測各種氣體的成效皆不佳，因此，我們就利用這個光譜儀對照各種元素及空氣的光，以及繪製光譜。

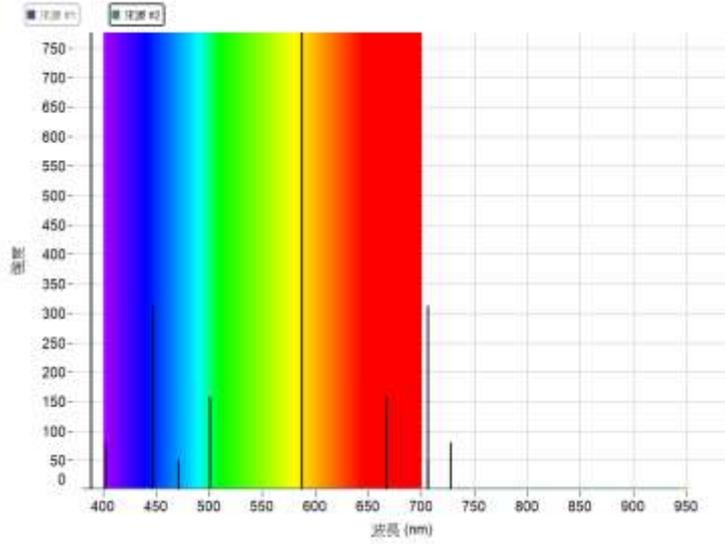


我們利用此儀器進行觀測。此儀器利用高電壓，可激發各種元素，使其發出各類光。

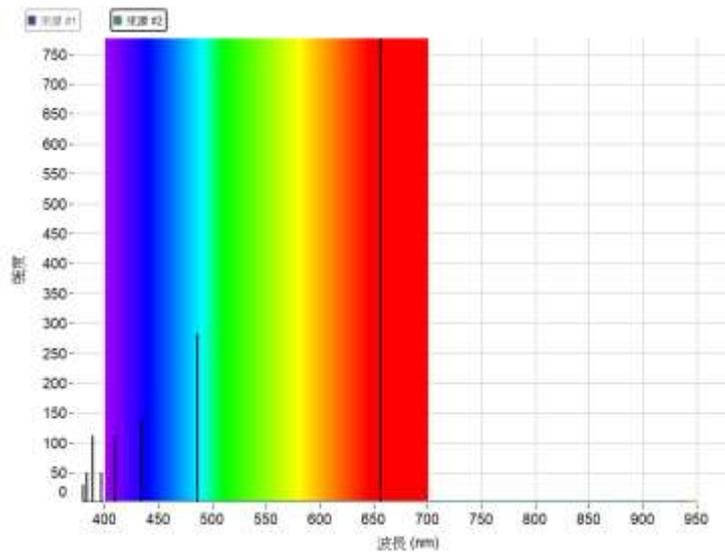
以下為各種氣體之光譜對照。



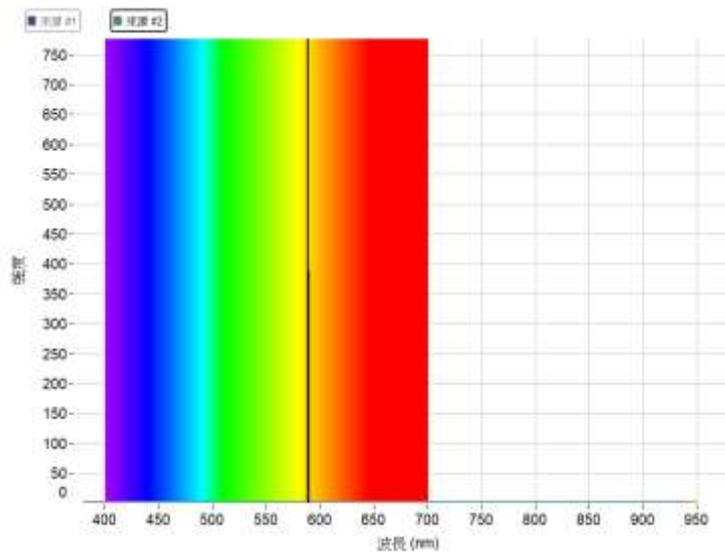
He

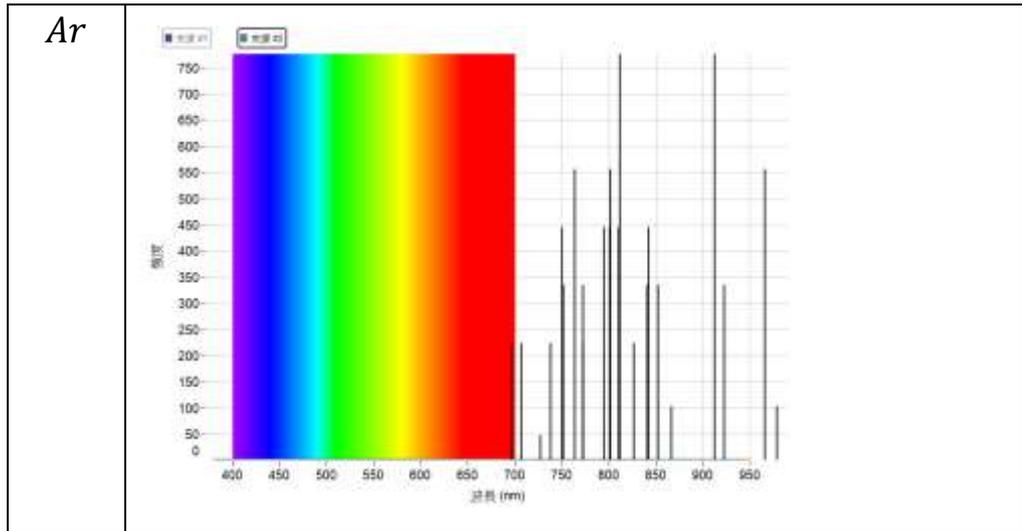


H₂



Na



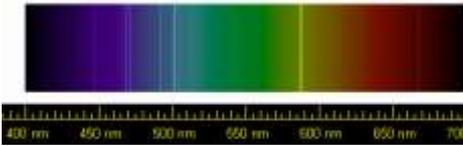
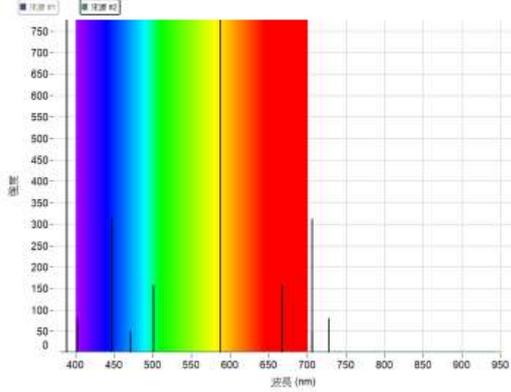
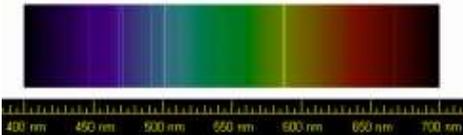
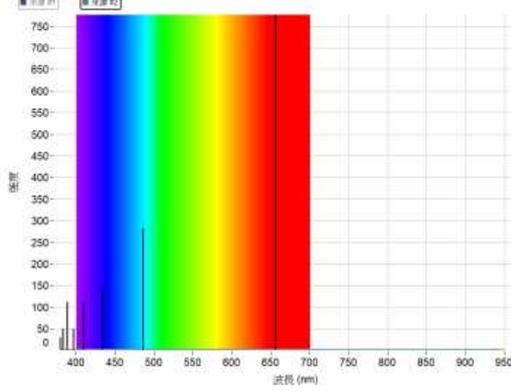
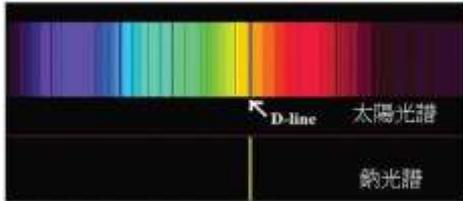
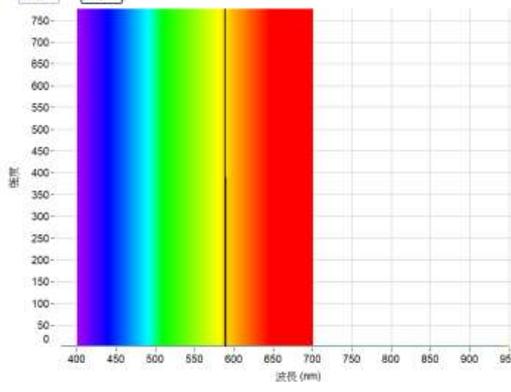
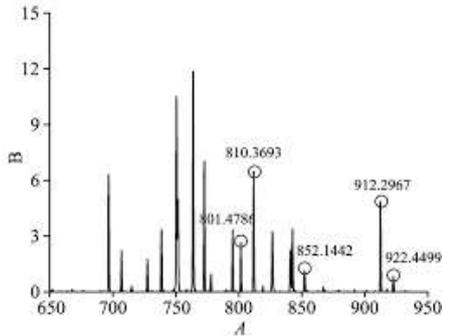
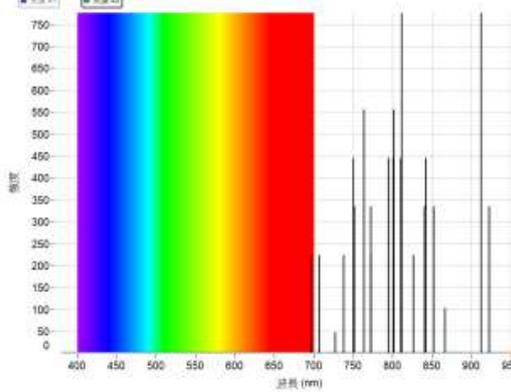


以上為記錄到之光譜。

四、與電腦資料比對：

我們最後，上網查詢各種氣體的光譜與我們紀錄之結果進行比對。查到之光譜如下：

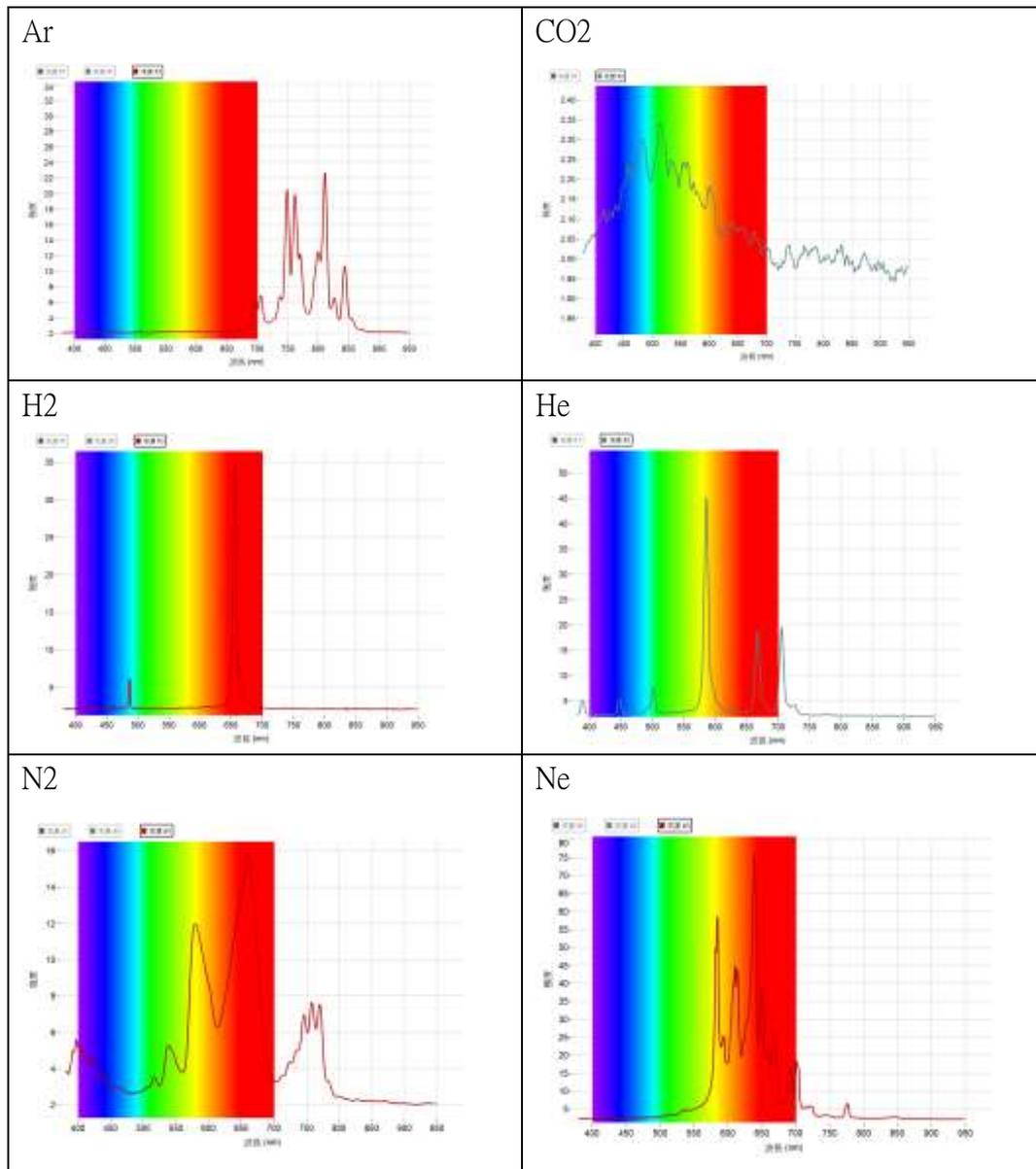
網路	實際
Hg_2	
Xe	

<p><i>He</i></p>		
<p><i>H₂</i></p>		
<p><i>Na</i></p>		
<p><i>Ar</i></p>		

最後我們能發現，我們自己測出的各元素光譜，與網路上查找到的資料很接近，沒有太大的誤差。

附錄：

2. 各種氣體利用 Pasco 光譜儀測出之實驗記錄：

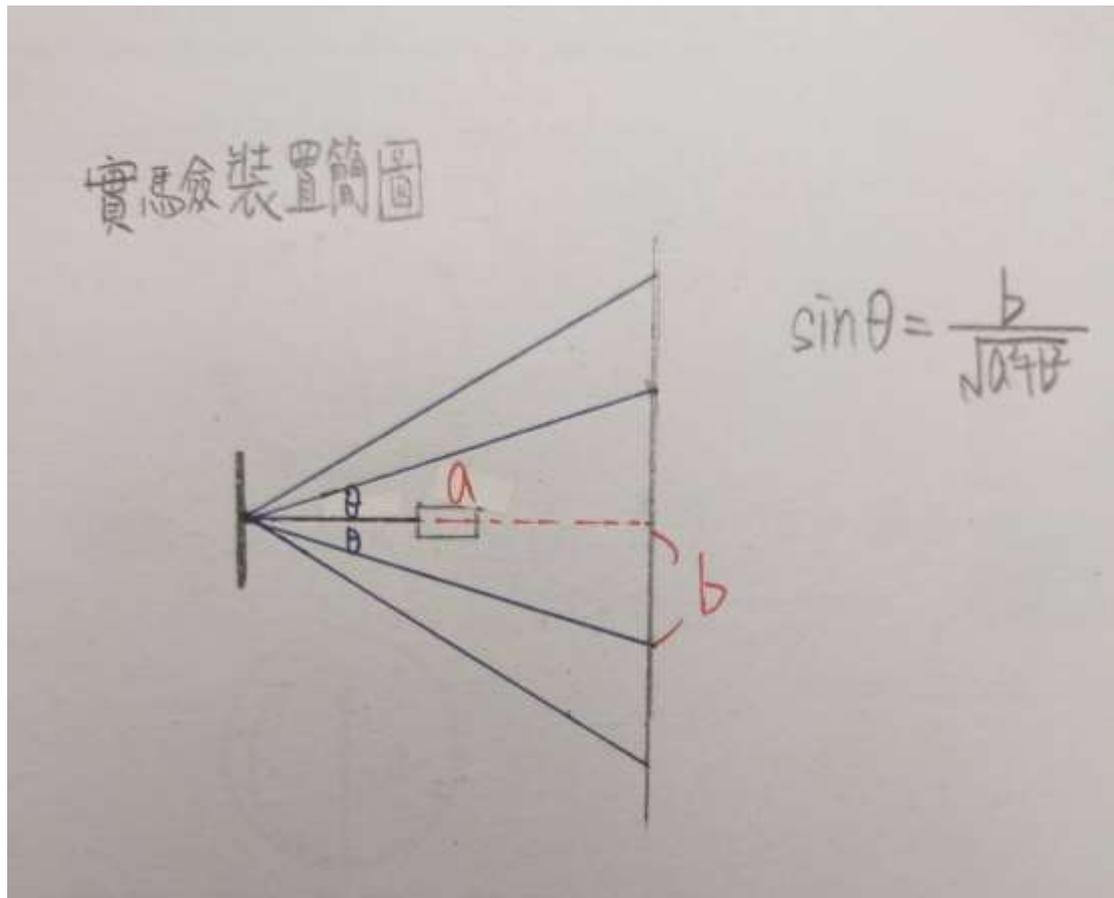


七、光碟片容量實驗

老師在上課時提到，我們可利用雷射打 CD 片及 DVD 片，經過計算算出此光碟片之容量。

實驗裝置：



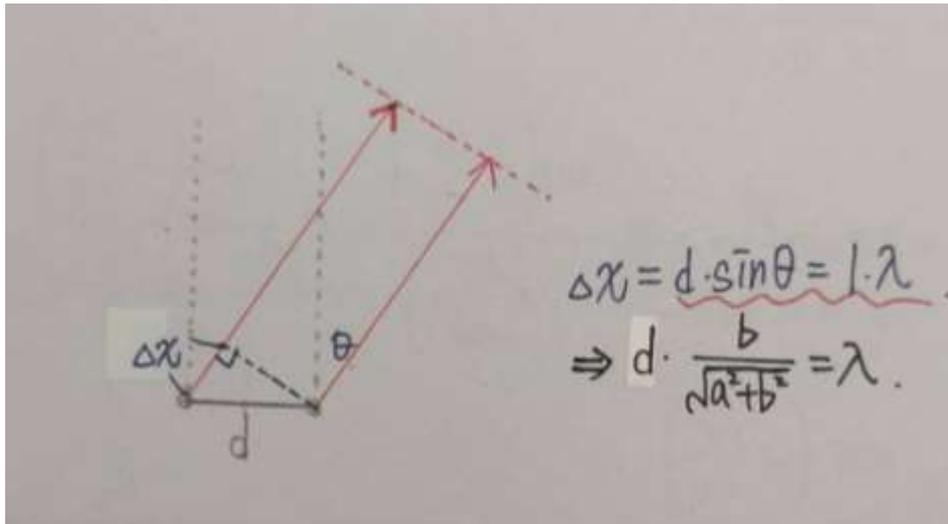


我們就利用光碟片在屏幕上的反射，利用公式計算出此光碟片之容量。

實驗理論：令光碟上，存儲訊息的格點為一小正方形。且邊長 d 。

且光碟上總共能存儲訊息的面積 A 、外徑 D_1 、內徑 D_2 。

將光繞射現象轉折處放大，分析情況。



由上知， $d = \lambda \times \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ ，且我們在此光碟片可利用之容量 = $\frac{A}{d^2} \text{ bits}$

$$\Rightarrow \text{容量} = \frac{\pi \left[\left(\frac{D_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{D_2}{2} \right)^2 \right]}{d^2} \text{ bits}。$$

最後，在實驗中取出 a 、 b 、 D_1 、 D_2 ，再全部代入，即可求出此光碟片之容量。

先在網路上，查到我們使用的雷射波長為 $532 \text{ nm} = 5.32 \times 10^{-5} \text{ cm}$

CD 片：我們先利用 CD 片做上述實驗。以下為取出的實驗數據(單位皆為 cm)。

$a = 64$ 、 $b = 25$ 、 $D_1 = 11.8$ 、 $D_2 = 4.6$ 。將數據皆代入上述公式，得出 CD 片容量 $\approx 517 \text{ MB}$ 。而實際容量約為 650 MB 。

DVD 片：我們同樣的，用 DVD 片進行實驗，取出之數據如下

$a = 22$ 、 $b = 32$ 、 $D_1 = 11.8$ 、 $D_2 = 4.6$ 。代入後，

得 DVD 容量 $\approx 2.6 \text{ GB}$ 。實際容量為 4.7 GB 。

電學

一、電路元件

二、基本電路

三、金屬探測器

一、電路元件：

介紹電路元件：

1. 電容器(C)：

電容器（英文：capacitor，又稱為 condenser）是將電能儲存在電場中的被動電子元件。電容器的儲能特性可以用電容表示。在電路中鄰近的導體之間即存在電容，而電容器是為了增加電路中的電容量而加入的電子元件。

當兩個介電質隔開的導體之間有電壓時，在介電質上會產生電場，因此正電荷會集中在一個導體，負電荷則是在另一個導體。電容器的電容定義為累積電荷和導體電壓之間的比值。國際單位制（SI）下電容的單位是法拉（F），定義為每伏特 1 庫侖（1 C/V）。一般電容器的電容約在 1 皮法拉（pF）（ 10^{-12} F）到 1 毫法拉（mF）（ 10^{-3} F）。電容

器的電容和導體的表面積成正比，和導體之間距離比反比。實務上，導體之間的介電質會通過微小的漏電流。而介電質的電場強度也有上限，因此電容器會有崩潰電壓。而電容器中的導體及其引腳會產生不想要的等效串聯電感及等效串聯電阻。

老師在課堂上，介紹了電容器的功能為：不讓電路內的電壓突然改變。而我們也有實際製作電路，並由示波器觀察電容內的電壓改變情形。

2. 電感器(L)：

電感器（英語：inductor）是一種電路元件，會因為通過的電流的改變而產生電動勢，從而抵抗電流的改變。這屬性稱為電感。

電感元件有許多種形式，依據外觀與功用的不同，而會有不同的稱呼。以漆包線繞製多圈狀，常作為電磁鐵使用和變壓器等中使用的電感也依外觀稱為線圈（coil）。用以對高頻提供較大電抗，通過直流或低頻的，依功用常稱為扼流圈（choke），又稱抗流圈。常配合鐵磁性材料，安裝

在變壓器、電動機和發電機中使用的較大電感，也稱繞組（Winding）。導線穿越磁性物質，而無線圈狀，常充當高頻濾波作用的小電感，依外觀常稱為磁珠（Bead）。

相同的，老師在上課時也介紹了電感的功能。電感是為了讓電路中的電流不輕易改變。我們同樣可以製作電路，觀察電感器中的電壓變化。

二、基本電路：

一、RC、RL、RLC 電路：

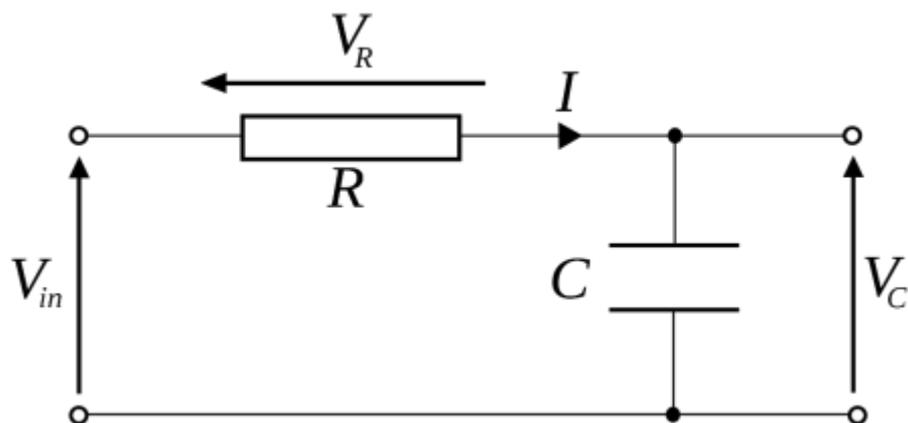
三種基本線性類比積體電路元件包含：電阻器（R）、電容器（C）和電感元件（L）。它可能藉由下列四種複合性材料組合而成：RC 電路、RL 電路、LC 電路以及 RLC 電路。這些電路中，大量的重要類型為許多類比積體電路的基礎。一致的是，它們皆可藉由無源濾波器運作。

RC 電路：

RC 電路（英語：resistor - capacitor circuit），或稱 RC 濾波器、RC 網路，也稱作相移電路，是一個包含利用電壓

源、電流源驅使電阻器、電容器運作的電路。一個最簡單的 RC 電路是由一個電容器和一個電阻器組成的，稱為一階 RC 電路。

我們此次作的是 RC 串聯電路，電路圖如下：



(圖源：維基百科)

若將電路視為分壓器，

$$V_{in}(s) = \frac{V}{s}$$

其經過電容器的電壓為：

$$V_C(s) = \frac{1/C_s}{R + 1/C_s} V_{in}(s) = \frac{1}{1 + RC_s} V_{in}(s)$$

$V_C(t) = V_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ ，其中 $\tau = RC$ ，稱為時間常數。

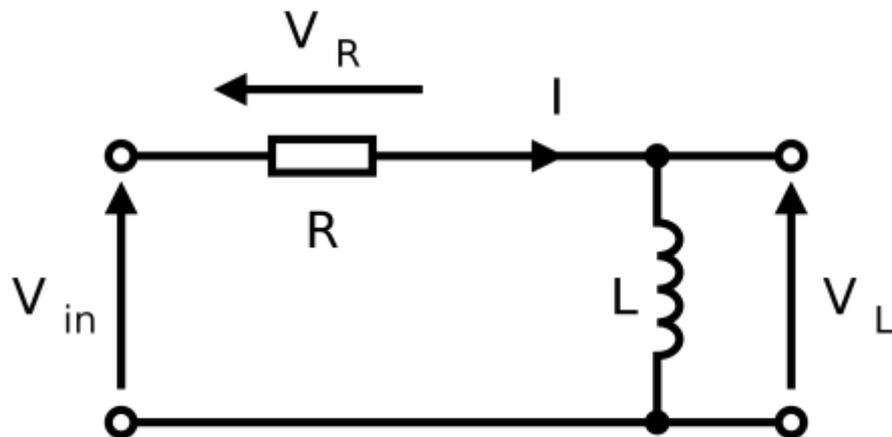
相反的，電阻的電壓 $V_R(t) = V_0 \times e^{-\frac{t}{\tau}}$

我們專研課就利用訊號產生器及示波器，觀察產生波型。

RL 電路：

RL 電路，全稱電阻-電感電路（英語：Resistor-inductor circuit），或稱 RL 濾波器、RL 網絡，是最簡單的無限脈衝響應電子濾波器。它由一個電阻器、一個電感元件串聯或並聯組成，並由電壓源驅動。

下為 RL 串聯電路的示意圖：



（圖源：維基百科）

又因為電感的效果是不讓電路輕易改變電流，所以觀察電感電壓變化的效果應和不輕易改變電壓的電容相反。

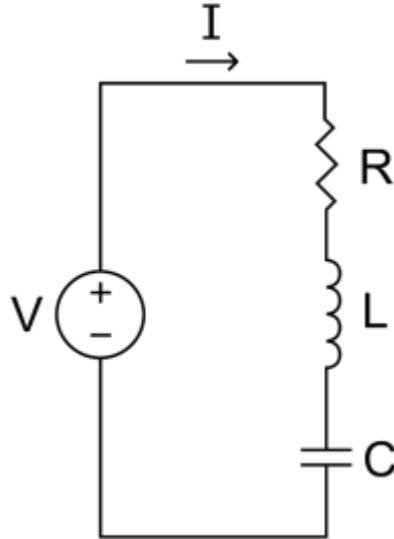
也就是說：在 RL 電路中 R 跟 L 產生的效果，應該分別與 RC 電路中的 R、C 效果相反。

我們同樣可利用訊號產生器及示波器，觀察到 RL 電路中各電路元件的電壓變化。

RLC 振盪電路：

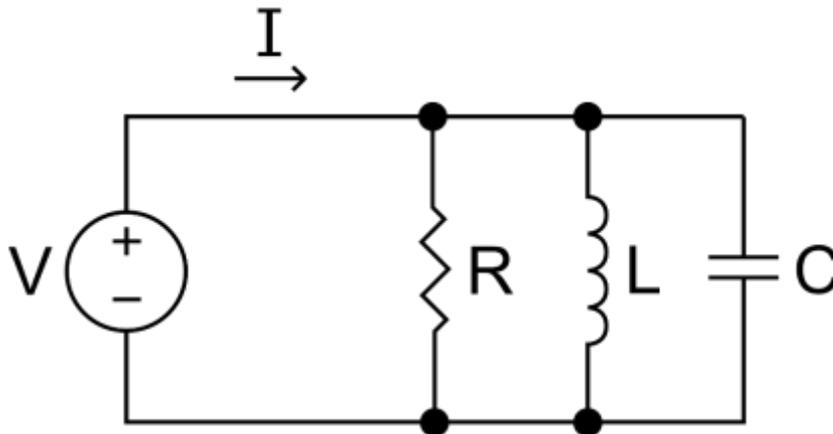
RLC 電路也分為串聯跟並聯形式，產生的效果也不同。

RLC 串聯電路：



(圖源：維基百科)

RLC 並聯電路：



(圖源：維基百科)

老師在課堂上說到，RLC 電路會發生受迫振盪的現象以及阻尼振盪的現象。我們就在專研課實作電路、並觀察此現象。

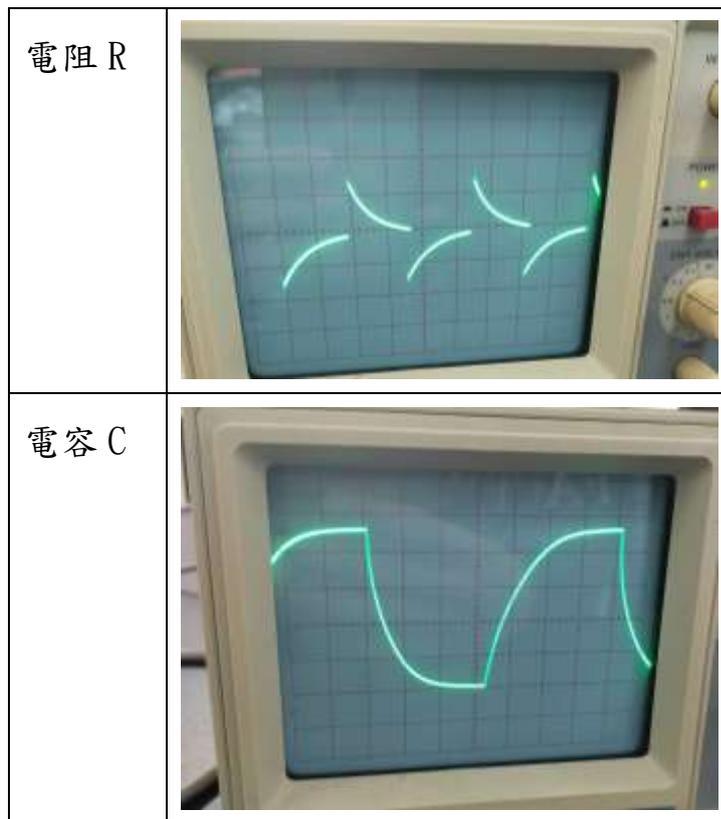
二、實作電路、觀察電壓變化：

我們所用到的實驗器材如下：

示波器 x1、訊號產生器 x1、麵包版 x1、跳線數條、電容器 x1、電感器、1k 歐姆電阻等。

1. RC 電路：

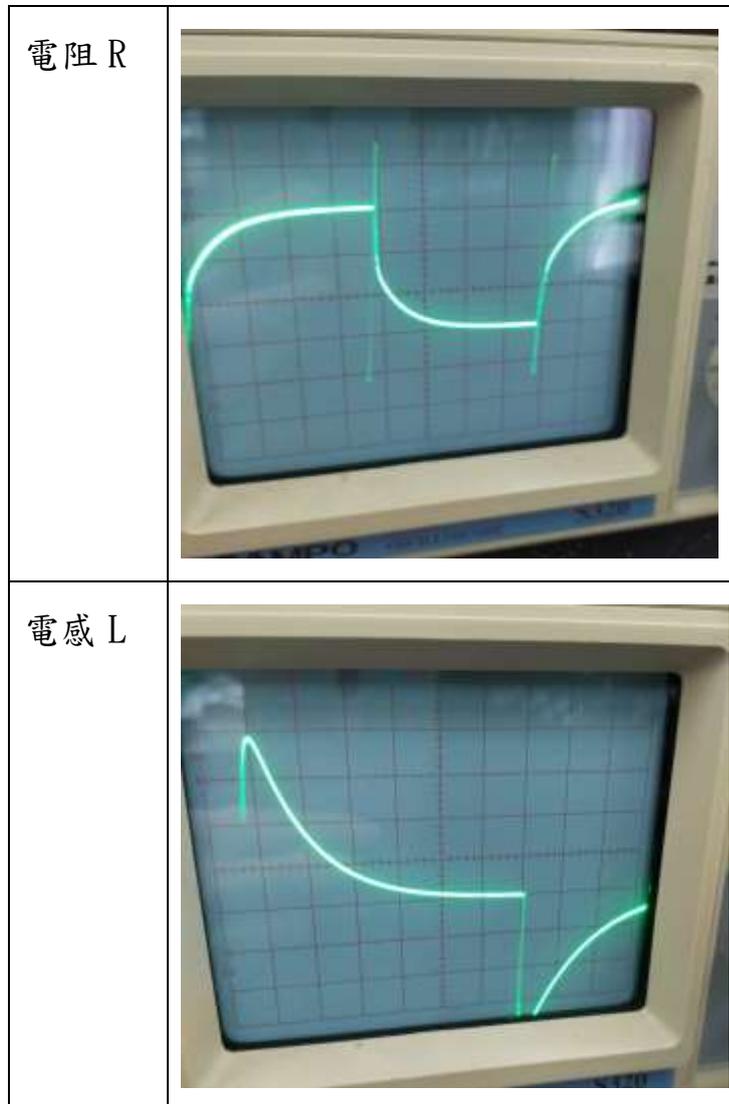
我們第一個做的是 RC 電路，我們記錄了電路中的 R 及 C 電壓變化情形。而我們這次實驗是輸入方波進行實驗，以下為示波器產生的效果：



我們能發現，這個結果與之前推測的公式結果符合。

2. RL 電路：

接下來我們換成 RL 電路，記錄電壓。



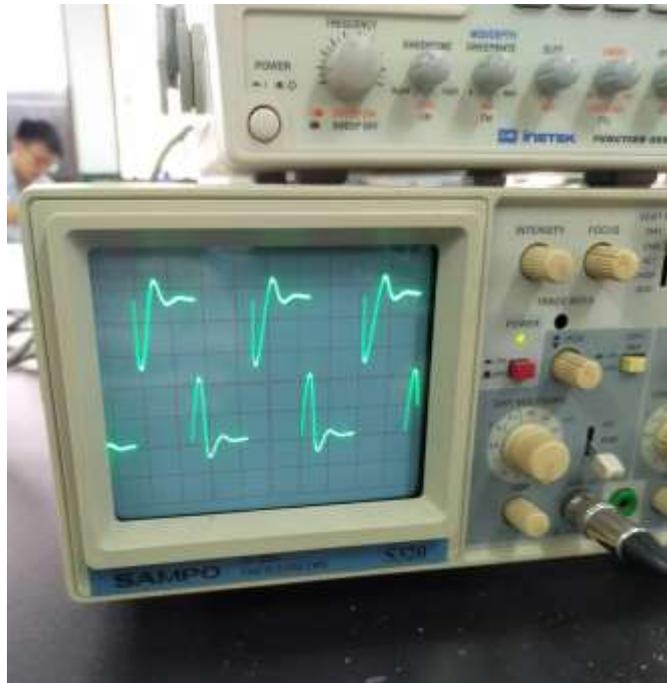
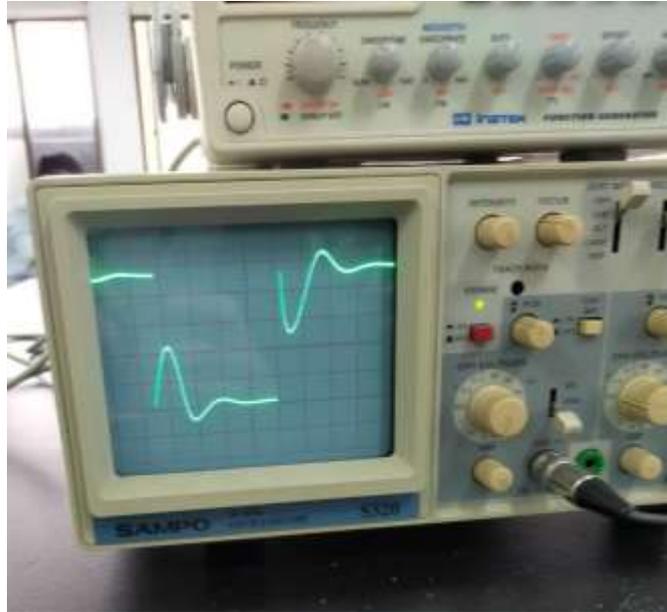
上表即為觀察結果。此結果與推測公式依然大致吻合。

3. RLC 電路：

原本我們要做出 RLC 電路電壓最大值與受迫振盪頻率之間的關係，但發現在我們的實驗中，電壓最大值的變化量過小，以致於觀測不到。

RLC 阻尼振盪：

以下為觀測到的現象：



我們從圖中發現，此阻尼振盪的阻尼係數偏大，原因可能為電路電阻過大、電路連接過程不恰當等。

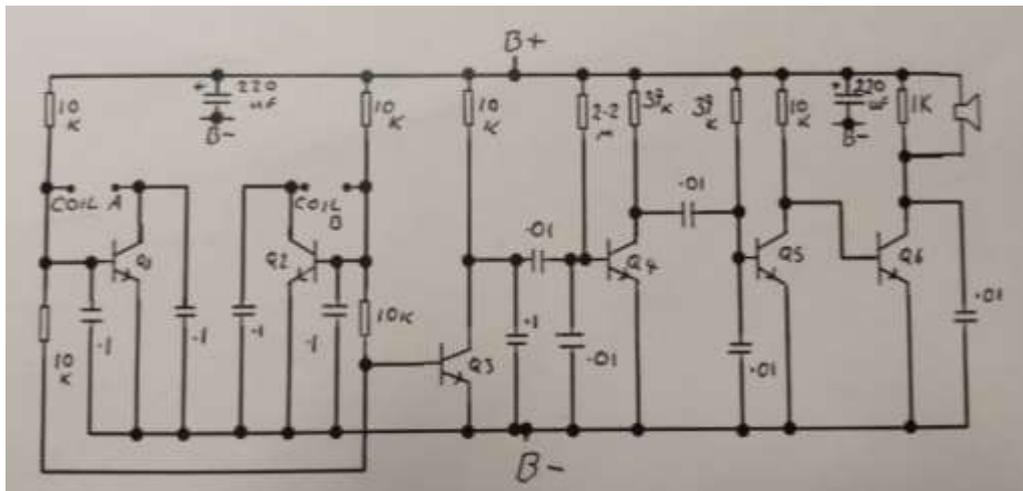
三、金屬探測器

BFO 金屬探測器：

我們做的是 BFO(Beat Frequency Oscillator)金屬探測器，這個探測器使用的原理是之前已經學過的拍音。當探測器接觸到金屬時，探測器內部電路振盪頻率就會跟著改變。因此，電路內的兩個振盪電路，就會產生拍音，使人耳聽到。而我這次先做出了探測器的電路部分，並確定電路無誤。

1. 探測器電路：

以下為老師提供給我們的電路示範圖：

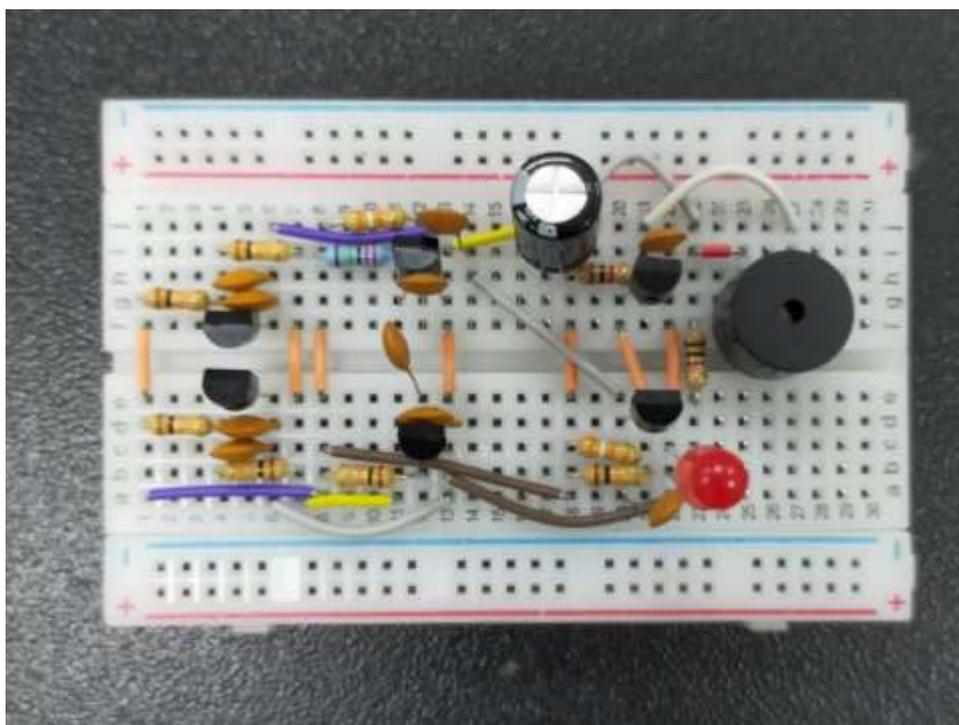


其中包含了兩個考畢子振盪電路、以及音訊擴大器。而底下是我們實際要在麵包板上安裝的電路元件，以及安裝位置。

BFO 金屬探測器

跳線 x7	E1F1, E7F7, E8F8, E13F13, E18F18, E21F20, E22F22	0.01uF x5 (103)	E12F11, G11G13, I12I14, A20B22, I21I22
10kΩ x6	D1D4, G1G4, B4B7, I4I7, B8B12, B18B21	0.1uF x5 (104)	C4C6, D5D6, G5G6, H4H6, D12D13
2.2MΩ x1	I8I11	470uF	I18+I17-
39kΩ x2	J8J12, C18C20	LED	C23+C22-
1kΩ x2	H18H21, E23F23	SPK	I23+J21-
跳線 x9	A1A8, C8A18, J18J23, A7A11, A6A13, B13A22, H14E20, J6J13, I13J17	coilA coilB	A4A5 J4J5
C1815 ECB x6	E654, F654, C13I211, H13I211, D222I20, G222I20	9V	G18+G17-

接著就是組裝這些元件到麵包板上。最後我做出來的成品如下：



此圖即為我最後做出來的成品。在這塊小小的板子上，承載著好多個小電路系統，非常神奇。



而上圖，為我拿老師的測試用線圈杯檢驗的過程。起初，我做的電路還有點小瑕疵，以至於我的蜂鳴器沒有發出聲音。到後來我才發現，是我漏裝了一個電阻才導致這個情況。

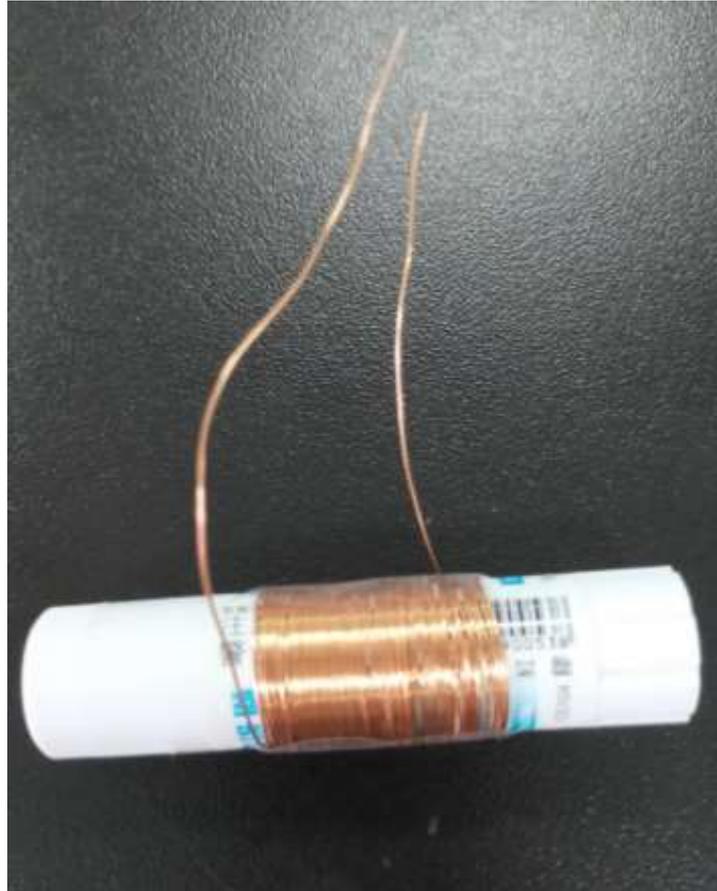
2. 線圈：

我先做出了用來探測的線圈，製作方法是；先準備一個紙杯，和一捆漆包線。接著將漆包線在紙杯上纏繞約 20 圈，並固定好漆包線形狀。最後將取出的漆包線二端用砂紙磨掉上面的漆，即完成了探測線圈的製作。下圖為我做的探測線圈的實際照片：



最後，將此探測線圈裝於上次所做的電路上，就完成了第一步。

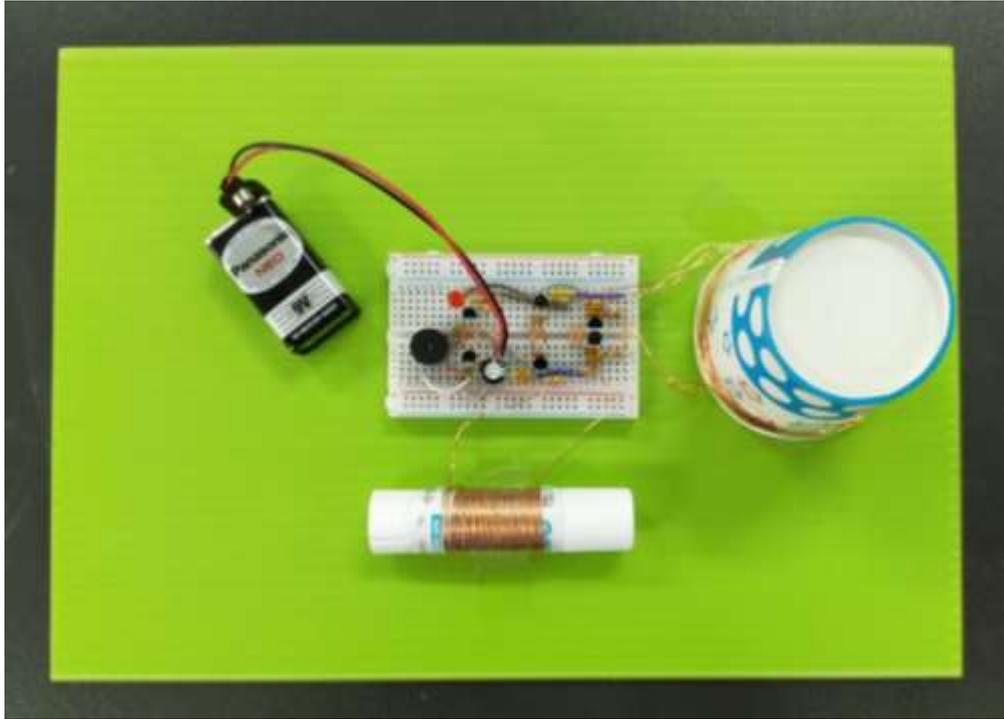
接著，我做出了配合用的線圈。而這個線圈的製作方法較繁瑣，首先，要先準備的有：一個口紅膠、一個小鐵塊、一捆漆包線。再將口紅膠中的膠去除掉，留下可轉動的外殼；準備好的小鐵塊塞進口紅膠中並固定住。最後，用漆包線纏繞約 60 圈、把二端用砂紙磨掉等。做完這些步驟後，配合的線圈就基本上是完成了。底下為我做出的實體：



而當我們轉動口紅膠時，裡面的鐵塊也會跟著移動，進而影響此線圈的電感值。所以我們可以利用這兩個線圈的配合，做出金屬探測器。

3. 完成品：

製作完這兩個線圈之後，就將他們全部組合到電路上。我最後做出來的成品如下：



接著，我利用這個成品去對實驗室中的金屬測試，果然能發出聲響。這代表我的金屬探測器已經大功告成，可以使用了。

實驗：

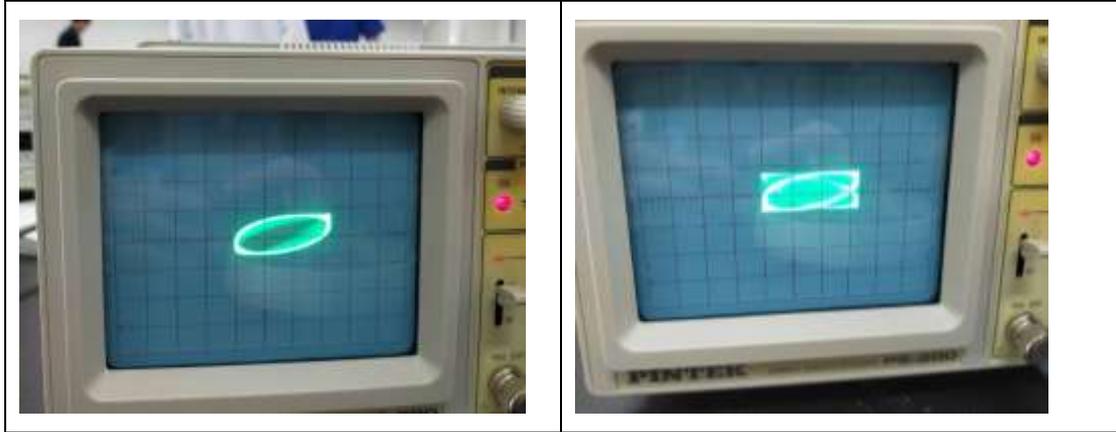
除了作出整個金屬探測器之外，我們還利用了探測器做了一些小實驗。藉此能更加瞭解金屬探測器的原理，以及它的性質。

實驗一：

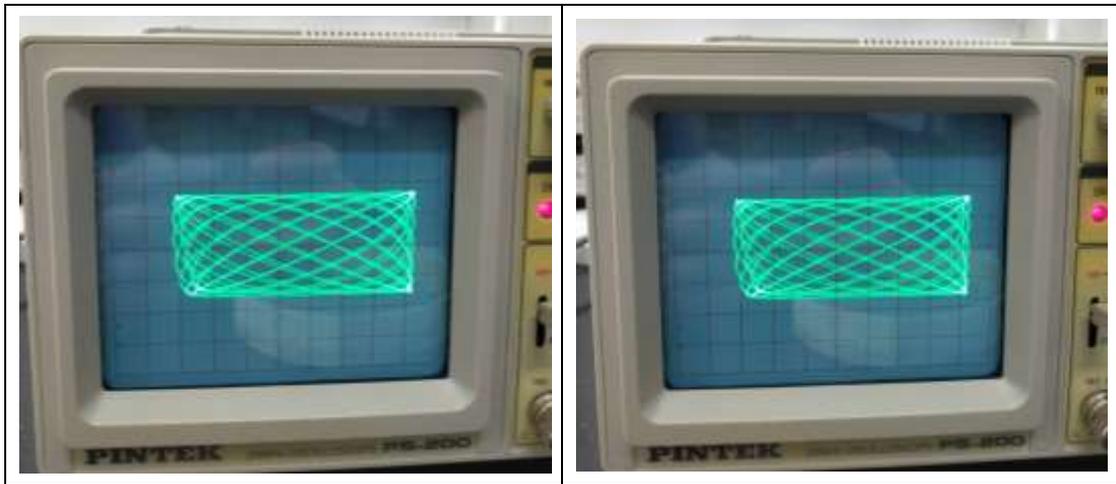
我們想利用電路中的兩個考畢子振盪電路，觀察它們振盪頻率之間的關係。於是我們就做了一個實驗來觀察此現象。

實驗步驟：

將兩個振盪電路的電壓源，利用跳線接到示波器上。再經過適當調整，觀察兩個電壓源產生的圖樣。



我們一開始，只有觀察到這樣的圖案，像是一個橢圓或長方形。這個結果與我們預測的結果(裡賽圖形)不大相同。

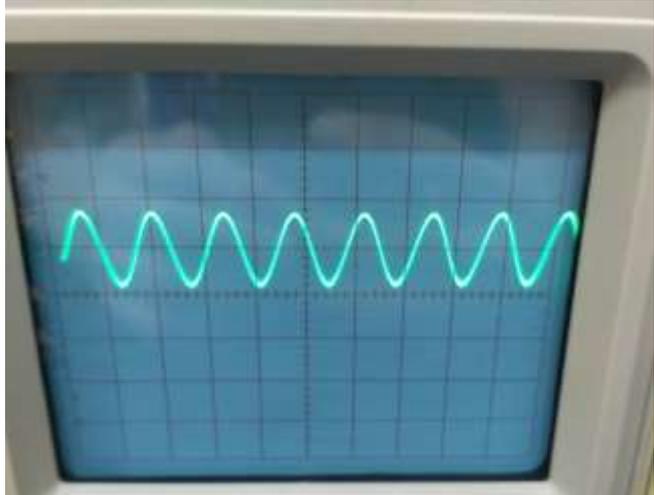
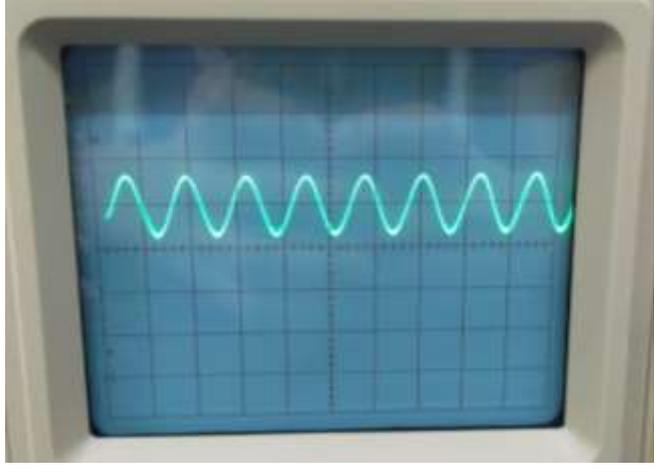
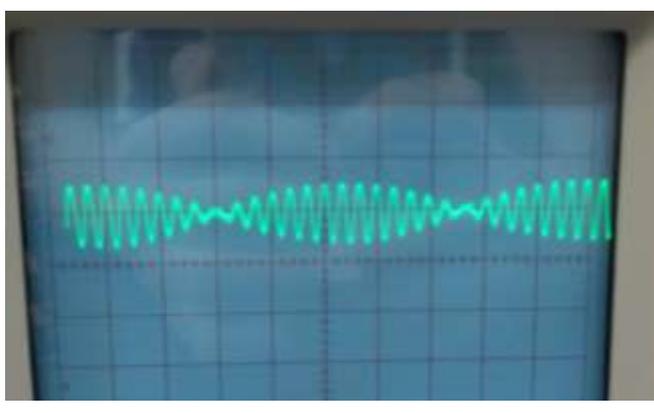


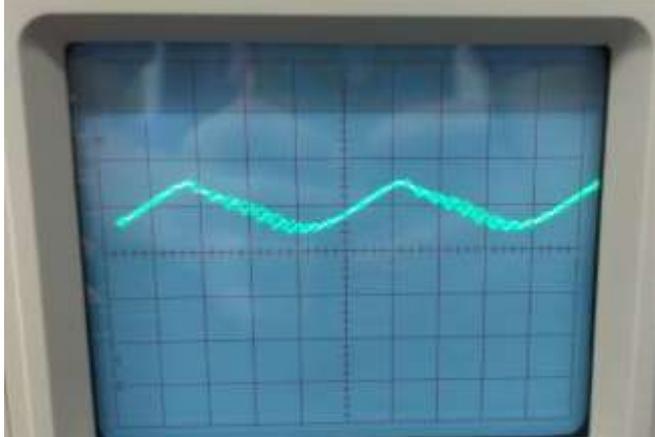
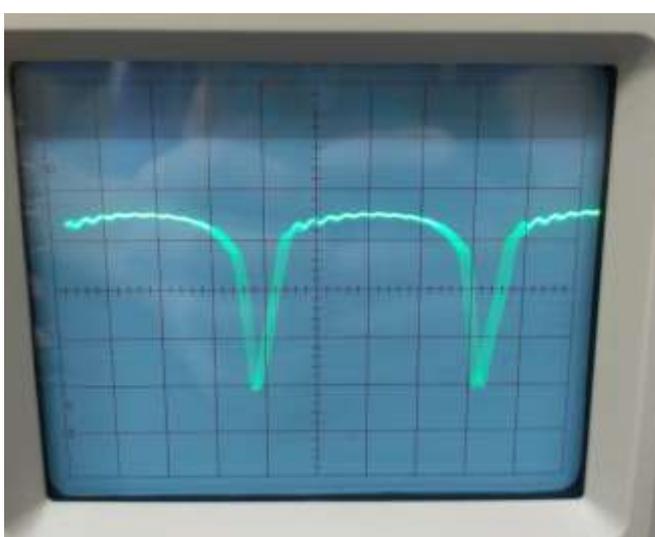
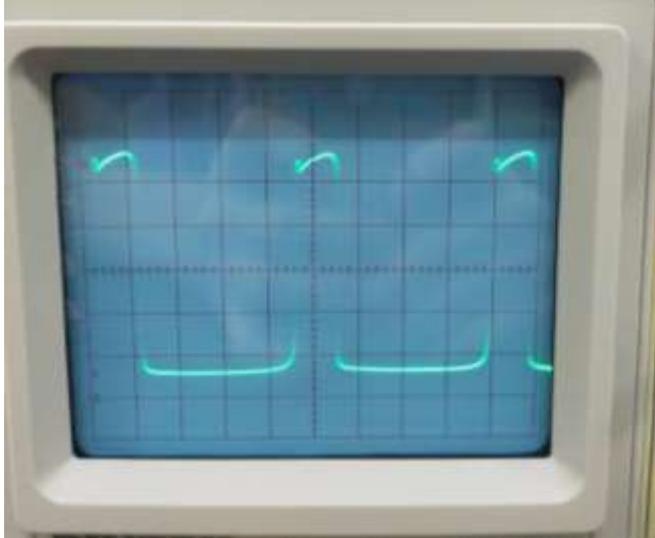
經過調整之後，我們終於能看到明顯的裡賽圖形，即為此二電壓源在示波器上產生的結果。

實驗二：

我們測量各個電壓源，觀察這些電壓源在示波器上產生的效果。

在我們的電路上，總共有 6 個三極體。這個實驗中，就是要測試這些電源的電壓在示波器上產生的結果。

V1	
V2	
V3	

V4	
V5	
V6	

我們能發現，這些電壓源，除了 V1 和 V2 外，其他產生的圖形都非常的不同。小小一個電路，居然能有這麼多的圖樣變化，真的非常厲害。在這一塊小小的電路板上，就有著複雜的電路在運作著。

科展試做

一、5/06、5/13：試做原科展題目

二、5/20~6/24：防疫停課不停學，改為做動畫

5/06：

我們接下來的目標，就是製作出科展題目的實驗裝置，並觀察到現象。而我們目前選擇的題目，是2021年IYPT的題目，名字是Wilberforce Pendulum。

我們這次的分工是：我留在實驗室用實驗室的器材嘗試實驗，我的其他組員去生活科技教室，試著製作自製彈簧。

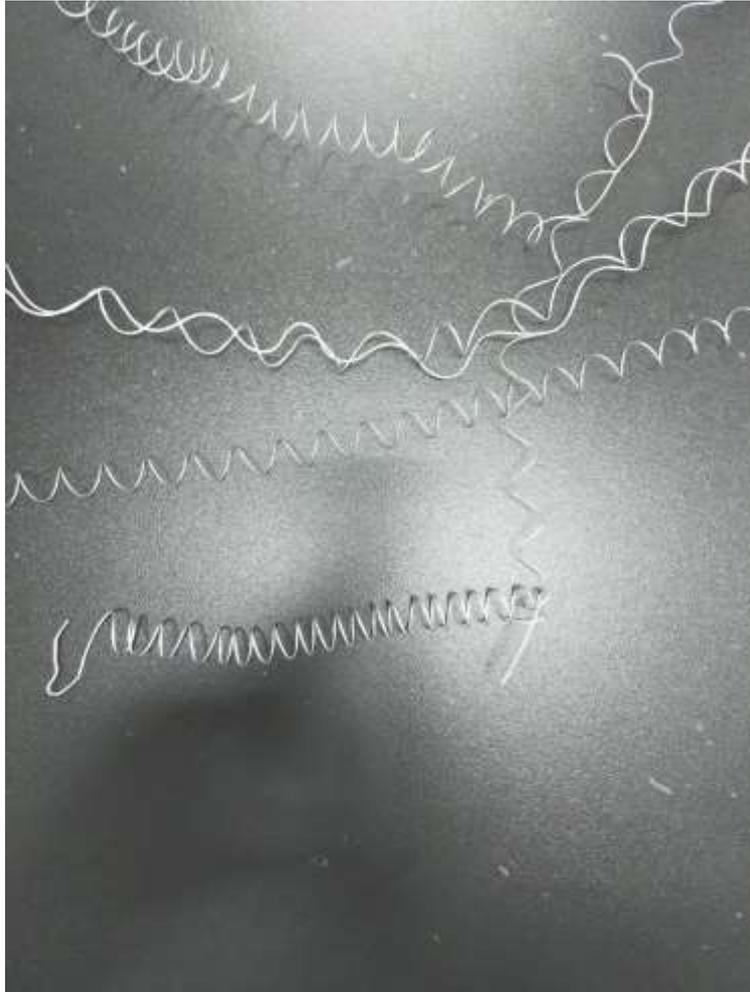
以下為我做的實驗裝置：



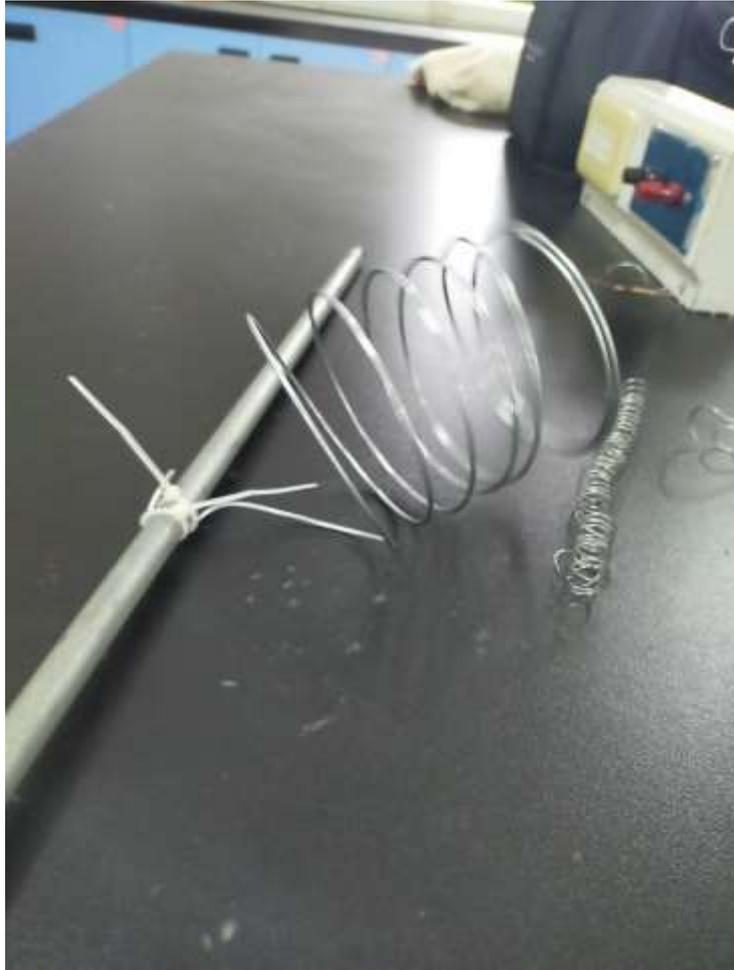
裝置類似鉛直彈簧簡諧運動的裝置。而我們試著觀察的現象，就是彈簧在上下擺動的同時，底下的重錘會快速左右轉動的現象。但我在實驗室內做的裝置，幾乎產生不出這種現象。

後來，我的組員就帶著他們的自製彈簧回來了。他們做了很多根小彈簧，然後試著做出這種現象。

他們也做出了很多失敗品，以及一些成功品。



這些是做出的失敗品，無法實際用在我們的實驗。於是我們就用了原本的成功品去做。但是，這些彈簧的負重效果實在不佳，很快就形變了。最後，我們用最粗的金屬圈，才勉強有了一點效果。



我們就利用這個裝置，試做了實驗的效果。結果到最後，我們依舊只有看到微微的左右轉動效果。所以我們會在下次專研前，去賣其他種類的彈簧，試著改善效果。

5/13：

這次專研課，我們一樣是在做科展試做。我們這週，做了其他種彈簧的實驗，試著做出網路上的現象。

實驗記錄：





我們這禮拜做的實驗，發現都沒有非常明顯的結果。所以我們的目標是，在下禮拜之前將其餘的彈簧全部檢驗一次，再決定此題目要不要繼續做下去。



國立師大附中 物理專研日誌

姓名：劉穆霖

日期：05/20

主題：科展改題目，以及先觀看科展相關課程

摘要：

我們發現，我們原先選的題目似乎在實驗室中，無法呈現出我們要的效果。再加上最近的疫情肆虐，我們無法在這兩個禮拜中去實驗室再度改變彈簧種類做實驗。因此我們決定改變題目，改為做 BFO 金屬探測器相關的科展。

所以我們這次專研課就開始做金屬探測器的理論預備。我們從老師給我們的教學影片(高三 CH9 電磁感應)先去學習相關的知識。我們預計下禮拜前就將教學影片全部看完，然後詢問相關理論的詳細內容。

下禮拜也依然是利用線上教學來上課，因此關於實驗的部分，我們希望等到疫情趨緩後，再回到學校去做實驗。



國立師大附中 物理專研日誌

姓名：劉穆霖

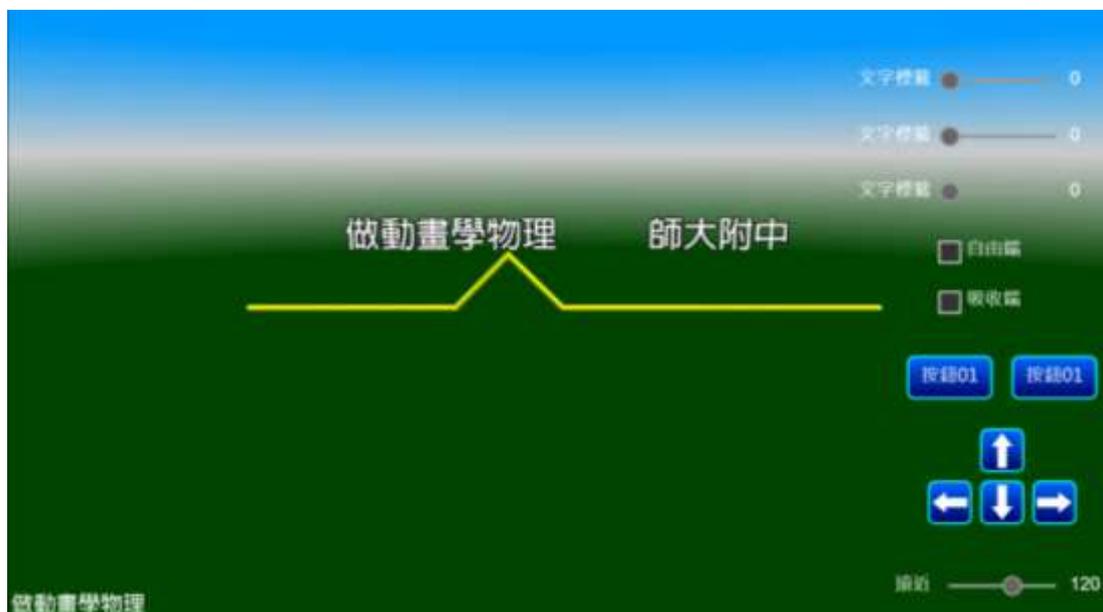
日期：05/27

主題：停課不停學，專研改為特色課程

摘要：

這禮拜，我們依舊是在家中上課。因為無法回到學校進行實驗，於是我們改為進行我們的特色課程，做動畫學物理。這禮拜，我們所做的是彈性弦上的波動。老師在禮拜三的專研，先跟我們講解了波動方程式，也就是我們的動畫的原理。

我做出的動畫如下：





國立師大附中 物理專研日誌

姓名：劉穆霖

日期：06/03

主題：高二數資班成發心得報告

摘要：

6/3 號是我們學長姐的數理資優班成果發表會，原本是要在學校舉行為期一天的成發。但因應疫情擴大，在家上課之後，這屆高二數資班就決定利用線上會議的方式舉辦。原本應該也會有其他學校的數資班學生來觀看，但由於會議人數限制，結果只剩下附中校內生了，非常可惜。

心得報告：

一、簡述整個活動流程：

在等到大家進入會議現場後，就有主持人開始主持成發。接著就是各組(數學→物理→資訊)依序進行報告。再來是中場休息，接著再依序繼續播放報告影片後，就結束正式的成發了。結束之後，各組專研就各自散開，進行各組的 Q&A 及討論時間。

二、選 1~2 個學長姐報告的題目紀錄：

1. 寶特瓶水面下降的研究

我想選的第一個題目是這個題目。原因為，我們現在的線上物理課剛好就在上流體力學，而且他們的實驗內容我覺得還蠻新奇的，我在之前完全沒有聽過可以用流體力學來測重力加速度 g ，因此我感覺這個題目蠻有趣的。以下我挑了兩個我最有興趣的實驗進行記錄。

實驗一：用開口瓶測重力加速度 g

底下為我擷取到的、學長報告的內容：

公式推導

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{--- ①}$$

$$P_0 + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_0 + \rho g0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad \text{--- ②}$$

由① $v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$ 代入②

$$\rho gh + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{A_1}{A_2} v_1 \right)^2$$

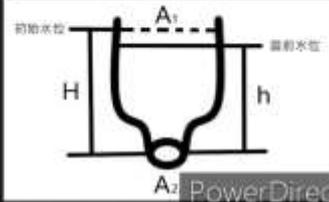
$$\Rightarrow 2gh = \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2} v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{A_2^2}{A_1^2 - A_2^2}} = Z \times \sqrt{2gh} \quad (\text{令 } Z = \sqrt{\frac{A_2^2}{A_1^2 - A_2^2}})$$

$$v_1 = Z \times \sqrt{2gh} = \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow Z \times \sqrt{2g} \times dt = -h^{\frac{1}{2}} dh \Rightarrow \int_0^t Z \times \sqrt{2g} \times dt = \int_H^h -h^{\frac{1}{2}} dh$$

$$\Rightarrow Z \times \sqrt{2g} \times t = -Z(\sqrt{h} - \sqrt{H}) \Rightarrow \sqrt{h} - \sqrt{H} = -\sqrt{\frac{H}{2}} \times Zt$$

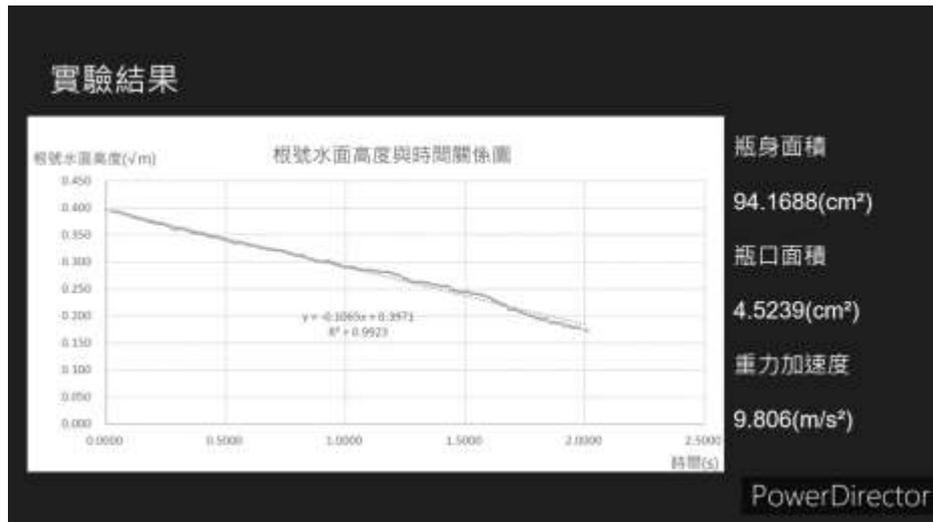
取 \sqrt{h} 為 y 軸， t 為 x 軸，則斜率 $m = -\sqrt{\frac{H}{2}} \times Z$

$$\text{for } g = \frac{2m^2}{Z^2} = 2m^2 \times \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}$$


PowerDirector

上圖為學長利用白努力方程式 $\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh + P = const.$

以及 $A_1 v_1 = A_2 v_2$ 推導出他們想求的 g 值的方程式。



上圖為他們測到的圖表，以及推算出的重力加速度。可見白努力定律對於測定重力加速度是具有準確性的。

實驗五：單一氣泡運動行為分析

實驗五：單一氣泡運動行為分析

由於在閉口瓶中水面下降的情況並不穩定，因此我們決定針對單一氣泡的運動行為進行分析

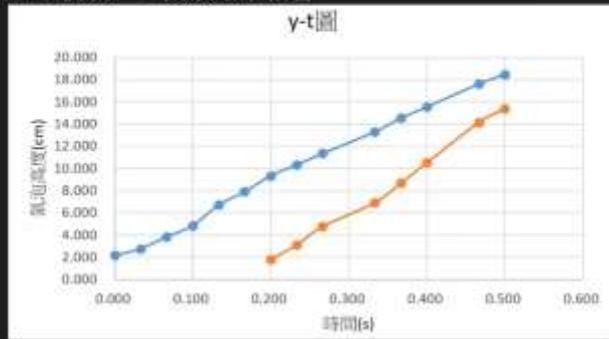
分析方法

- 1.將影片匯入Tracker
- 2.設定比例尺
- 3.選擇單一氣泡，並記錄其上升過程中每個時間點的位置
- 4.將同一次實驗中的不同氣泡的紀錄情形繪製在圖上

PowerDirector

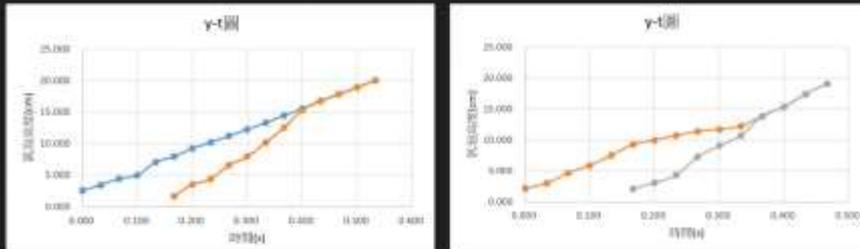
我覺得這個實驗也滿厲害的，他們能在氣泡這麼多的瓶子裡抓出單一氣泡進行分析。

實驗結果 情況一：兩氣泡不相會



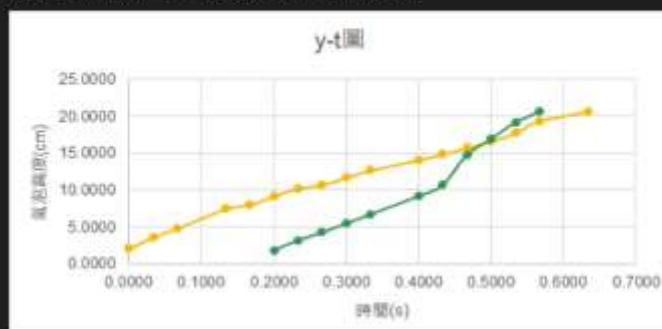
PowerDirector

實驗結果 情況二：兩氣泡相會並合併



PowerDirector

實驗結果 情況三：兩氣泡相會並超越

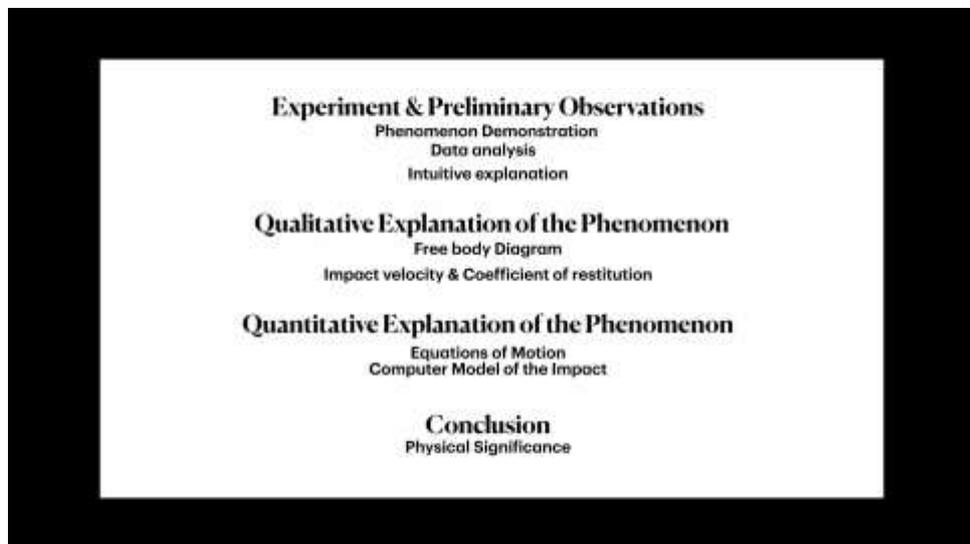


PowerDirector

以上為他們記錄到的實驗結果製圖，他們將氣泡的運動情形進行分析及討論，分為三種情況分析。

2. 有角速度的橄欖球運動行為分析

這組科展的內容也令我很感興趣，這個題目一開始為 IYPT 的題目，然後這組的學長們就以這個題目出發，進行科展的研究。另外我覺得這組很特別的是，他們的科展報告居然是用英文進行，而報告過程也沒有出現特別的卡詞或停頓，我認為這樣是非常厲害的。因為報告者不僅要瞭解物理名詞的英文說法，而且報告對演講者的口說能力以及颱風都要有一定的門檻。在這樣的條件下，還能順暢地進行演講，對我來說是非常強的。

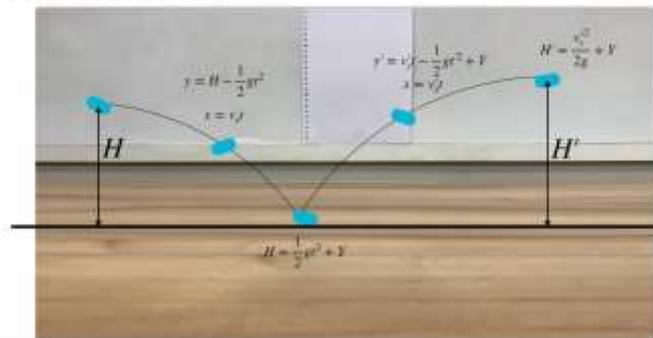


此為他們科展的大綱及細項。其中包含了實驗的進行、理論解釋、討論及結論等。

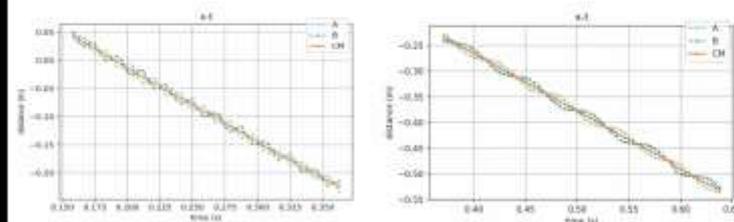
Demonstration

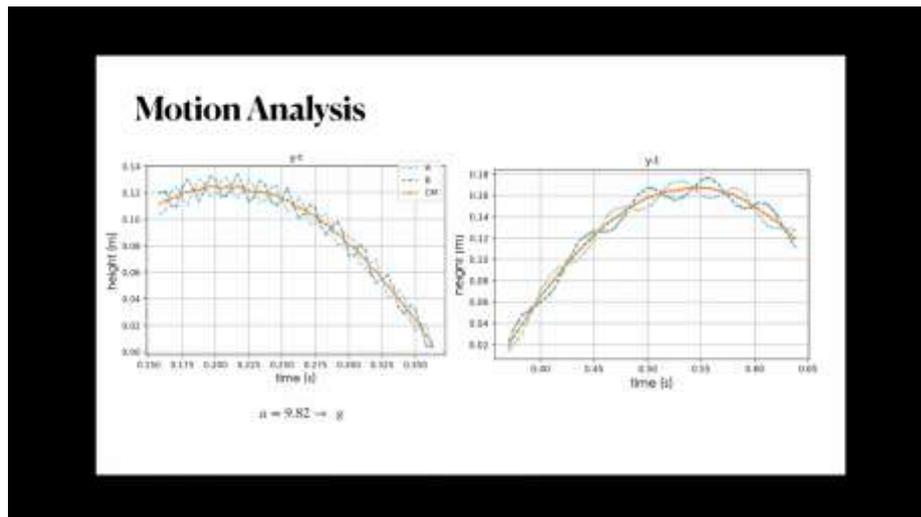


Motion Analysis



Motion Analysis





以上皆為他們的實驗展示及過程分析。其中分析了運動過程的軌跡、x-t 圖及 y-t 圖等。

Free Body Diagram

Greater Average Normal force causes the capsule to rebound higher.

Impulse momentum theorem

$$F \Delta t = \Delta P = m \Delta v$$

In the vertical direction: In the horizontal direction:

$$N_{avg} = m \left(\frac{v'_y - v_y}{\Delta t} \right) \quad f_{avg} = m \left(\frac{v'_x - v_x}{\Delta t} \right)$$

Change in Angular Momentum

$$(F \times D) \Delta t = \tau \Delta t = \Delta L = I \Delta \omega$$

$$N_{avg} \times D + f_{avg} \times D = \tau_{avg} = I \left(\frac{\omega' - \omega}{\Delta t} \right)$$

Qualitative Explanation

At certain impact angles, the impact point has additional vertical velocity due to angular velocity

A higher impact speed creates a greater Normal force

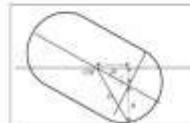
A greater Normal force imparts greater vertical momentum

The capsule leaves the ground at a greater speed than it landed

The rebound height exceeds the initial height

再來是他們的理論分析，他們利用上面的理論，再次進行軌跡分析。

Equations of motion

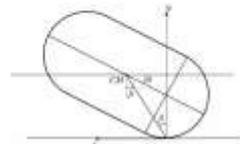


$$Y = \frac{h}{2} \sin \theta + R$$

$$X = \frac{h}{2} \cos \theta$$

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\cos \theta = \frac{X}{D} \quad \sin \theta = \frac{Y}{D}$$



$$v_{imp} = v_{cy} + D\omega \sin \theta = v_{cy} + X\omega$$

$$v_{imp} = v_{cy} + \frac{h}{2}\omega \cos \theta$$

$$v_{cy}(t) = v_{cy} + \frac{h}{2}\omega \cos \theta - \int_0^t N dt$$

$$v_{imp} = v_{cy} + D\omega \cos \theta = v_{cy} + Y\omega$$

$$v_{imp} = v_{cy} + \left(\frac{h}{2} \sin \theta + R \right) \omega$$

$$v_{cy}(t) = v_{cy} + \frac{h}{2}\omega \cos \theta - \int_0^t N dt$$

$$N \frac{h}{2} \cos \theta + \int_0^t N \sin \theta + \dot{R} = \tau = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Conclusion

The phenomenon occurs because rotational and translational energy transfers during impact.

The Normal force is responsible for increasing vertical velocity.

Certain impact angles have greater impact velocity and therefore greater normal forces

The impact can be modeled with hypothetical dampened spring

最後，他們推導出了一系列方程式，是利用理論分析出的各種結果；還有結論，是最後統整出來的大致結果。

三、給學長姐的回饋：

我覺得這次的成發辦得還算成功，但可惜有疫情阻撓，而使得成發無法如期在學校舉行。這次學長姐們報告的題目很多都很有趣，而且報告的題目也涵蓋了很多種類。例如運動學、力學、光學等。而且學長姐們的科展報告做得很完整，動機、實驗、分析、討論、結論一應俱全。在專研的各方面，學長姐身上都有值得我們學習的地方。我們在接下來的專研課也會朝著這方向努力，使我們研究的品質能有實質的提升。

四、對明年成發的自我期許：

我希望，到了我們明年成發的時候，能把我們的題目都做到好，並且製作完整的報告。而我們在上次科展的時候，遇到了許多的問題。因此我也希望我們到了高二，就能將這些問題迎刃而解。



國立師大附中 物理專研日誌

姓名：劉穆霖

日期：06/10

主題：製作二維彈性膜上駐波動畫

摘要：

這禮拜，老師教我們做彈性膜上的駐波。其中利用波動方程的離散化以及駐波的特性，推導出彈性膜上波動的方程式。

2D 方形膜上的駐波：令一方型彈性膜長 a 寬 b ，座標原點設於膜之左下角端點，向右及向前為正。

1. 波動方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

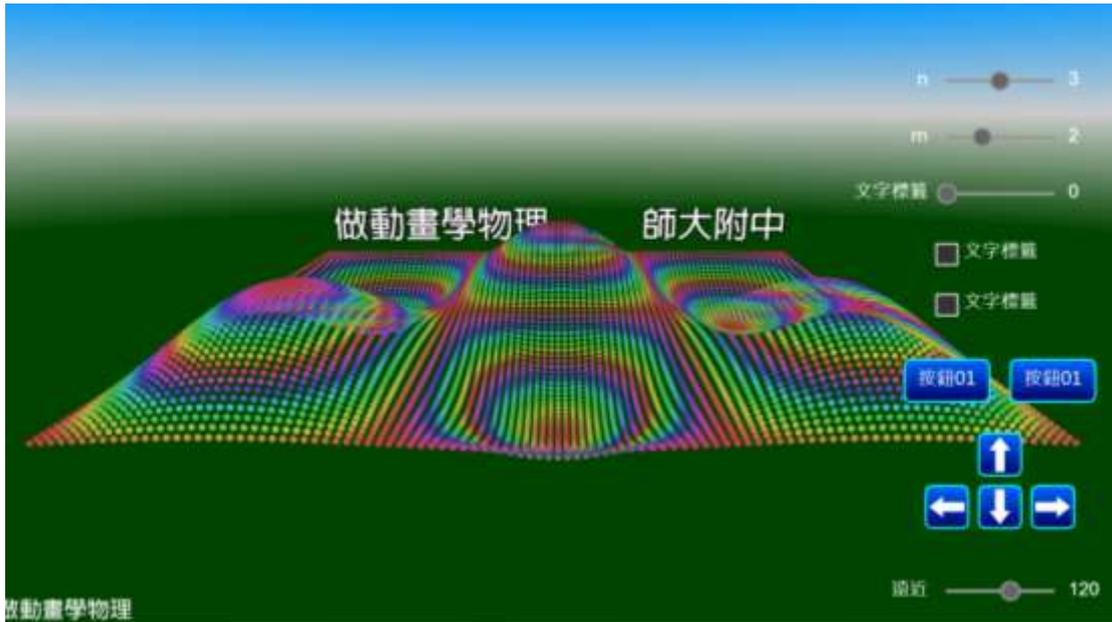
2. 分離變數，令 $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$

3. 推導波動方程，最終得到下式：

$$u_{m,n}(x, y, t) = A \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos\left(\pi c \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} t\right),$$

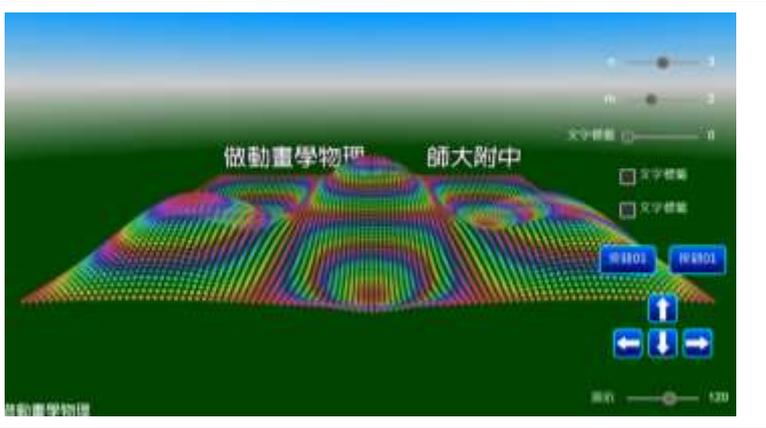
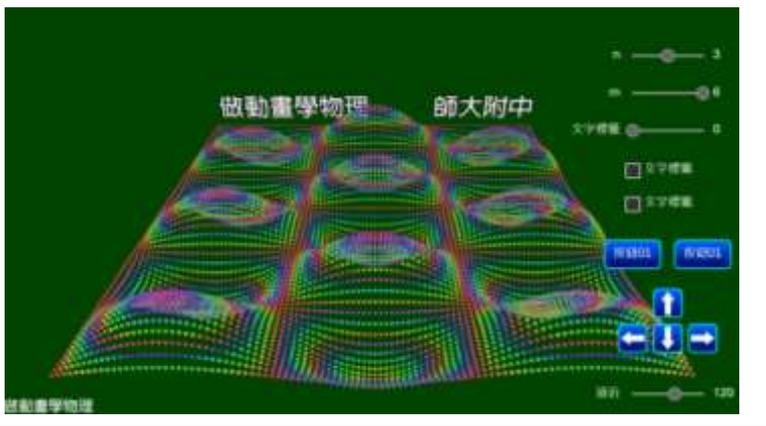
其中 $m, n \in \mathbb{N}$ 。

以上，為老師帶著我們推導的理論部分，接著就來看動畫的部分：



以上為最後做出的動畫。能看到，螢幕右上方有個可以調整 n 及 m 值的拉桿。藉由這兩個拉桿，我們就能看到，方形膜上不同樣貌的駐波。以下為經過整理後，各種的駐波樣貌。

$n = 1, m = 1$	
$n = 3, m = 1$	

$n = 3, m = 2$	
$n = 3, m = 6$	

我們可藉由動畫的製作，實際觀察到有趣的物理現象。上表的內容中，我們就可以看到彈性膜上駐波的樣貌。進行動畫的製作，既能將物理理論與資訊科學結合，又能實際看到各式各樣的現象，而不只是學習抽象的理論，真是一舉兩得。



國立師大附中 物理專研日誌

姓名：劉穆霖

日期：06/17

主題：板上彈球，週期倍裂

摘要：製作板上彈球動畫

一、二者之運動方程式：

板子做簡諧運動，其高度隨時間關係為：

$$(1.1) \quad y(t) = A \sin(\omega t)$$

而速度隨時間關係為：

$$(1.2) \quad \dot{y}(t) = A\omega \cos(\omega t)$$

接著是球在板上的運動方程式，其中 $(t - t_{n-1})$ 為球自從上次碰撞到現在所經的時間； C_n 為球第 n 次碰撞時的高度； u_n 為球第 n 次碰撞時反彈的速度。

$$(1.3) \quad x_n(t) = C_n + (t - t_{n-1})u_{n-1} + \frac{1}{2}g(t - t_{n-1})^2$$

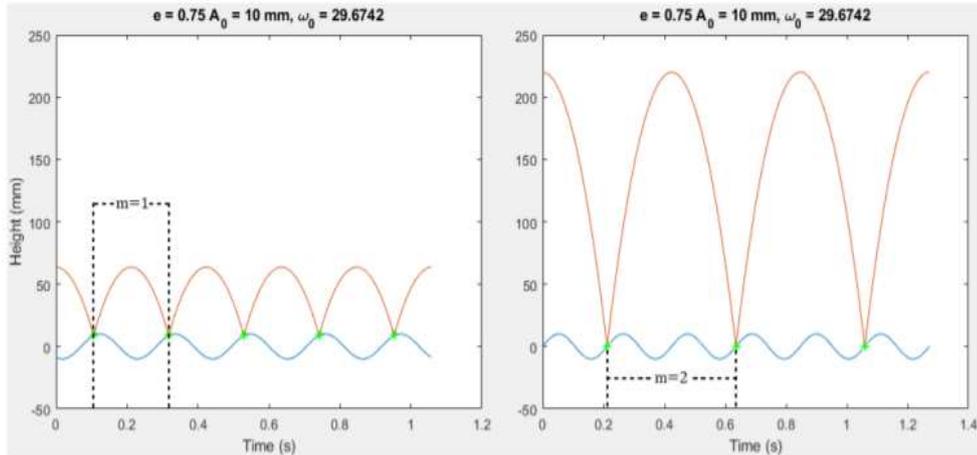
我們假定板子的運動不受球的影響，即球質量相對板可忽略不計，則球第 n 次碰撞後反彈的速度會是(1.4)， e 為恢復係數。

$$(1.4) \quad u_n = \dot{y}(t) + e(v_n - \dot{y}(t))$$

球與板發生碰撞時即為式(1.1)與式(1.3)相等的時候。

$$(1.5) \quad C_n + (t - t_{n-1})u_{n-1} + \frac{1}{2}g(t - t_{n-1})^2 = A \sin(\omega t)$$

二、球碰撞呈固定週期之條件：



假設 $\tau = mT$ ，即在球兩次碰撞間板會振盪 m 次；而球反彈速

度可寫成 $u_n = \tau g/2$ 、週期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ，可求得：

$$(2.1) \quad u_n = \frac{m\pi g}{\omega}$$

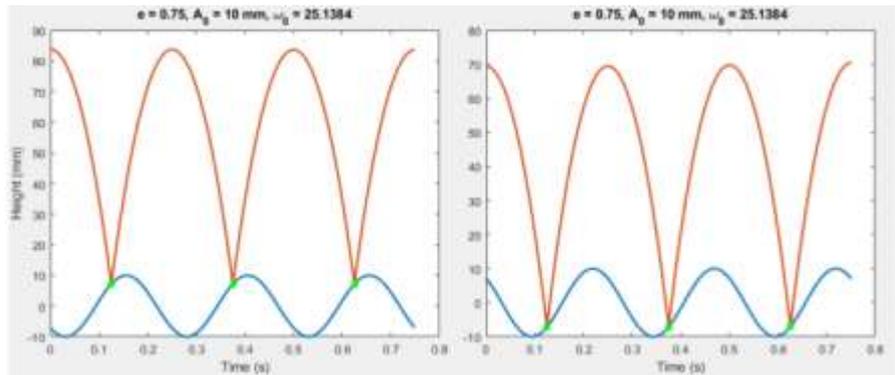
因為球反彈速度即落下速度，則可得(2.2)：

$$(2.2) \quad u_n = A\omega \cos(\varphi) \frac{1+e}{1-e}$$

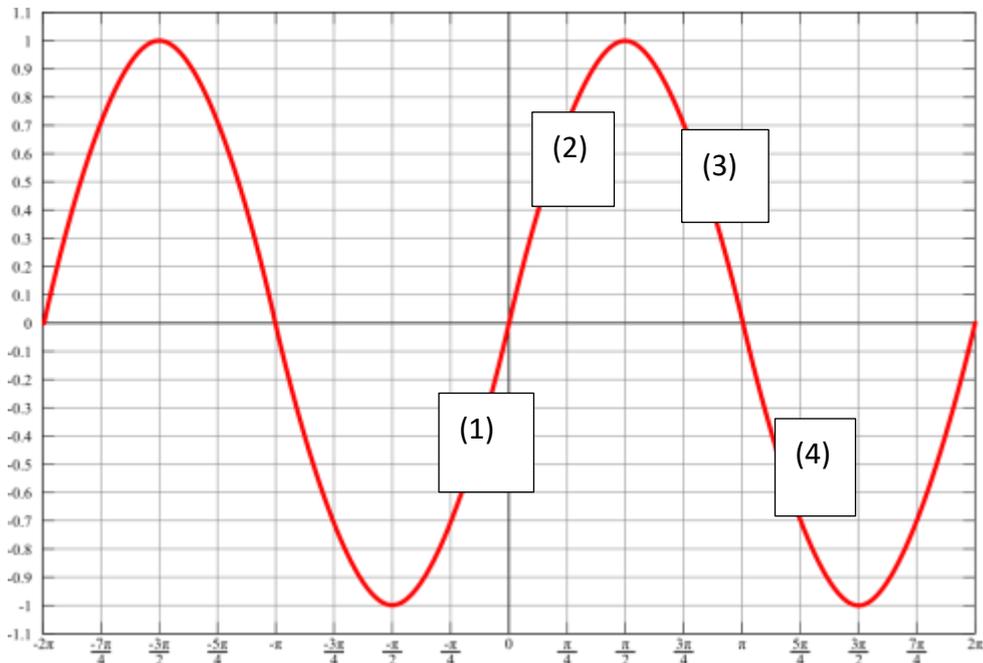
式(2.1)及(2.2)聯立求解，可求出 $\cos(\varphi)$ ：

$$(2.3) \quad \cos(\varphi) = \frac{m\pi g}{A\omega^2} \frac{1+e}{1-e}$$

三、球穩定反彈的條件：



論文中提到，若要使球彈跳週期穩定並非是在任何狀況下皆可可行的。因此論文有一部份在討論使球彈跳週期穩定的條件。



(圖片來源：維基百科)

以下進行碰撞情形之分類討論：

因(3)和(4)區間中，球與板相撞時板正在下降，再加上會有能量的耗損，因此無法使球向上的速度和相撞前相同，所以不穩定。

在(1)區間發生碰撞：若球碰撞位置有些許的向下偏差，則每次碰撞完，因與板相撞位置降低，撞完速度降低、接著再進行循環，下降位置就更低；若有向上偏差也同理。因此這種情況就會跳出原本所在區域(1)，所以不穩定。

在(2)區間發生碰撞：與(1)相反，若有向下偏差，則碰撞造成的結果可使再撞一次時的位置升高，向上亦如此。因此若碰撞位置在(2)區間，則週期可較穩定。

由上述討論，我們可得結果：在(2)區間時週期較穩定；

$$\Rightarrow 0 < \sin(\varphi) < 1。$$

因此，我們欲求穩定時的高度，就將(1.1)無因次化，轉為解數學問題。

$$(3.1) \quad \text{令 } \Gamma = \frac{A\omega^2}{\pi g}$$

$$(3.2) \quad \Gamma = \frac{m}{\cos(\varphi)} \frac{(1-e)}{(1+e)}$$

根據論文，將 Γ 解出後，可得上下限：

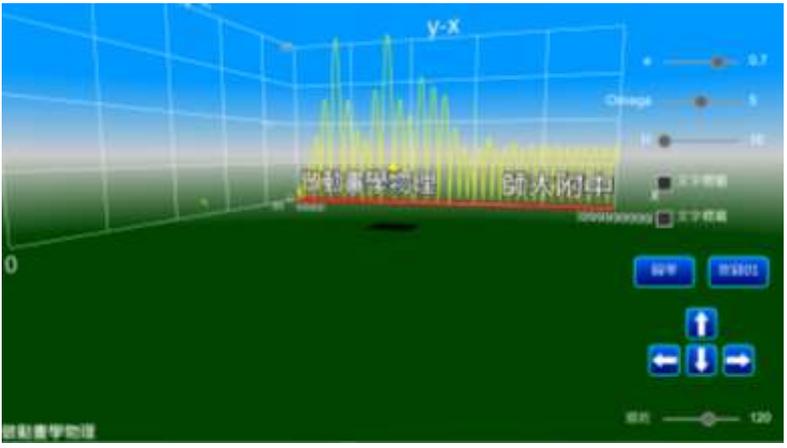
$$(3.3) \quad L < \Gamma < U$$

$$(3.4) \quad L = m \frac{1-e}{1+e}$$

$$(3.5) \quad U = \sqrt{\left[\frac{m(1-e)}{(1+e)}\right]^2 + \left[\frac{2(1+e^2)}{\pi(1+e)^2}\right]^2}$$

利用以上理論推導，我們就能透過改變相關參數，藉由動畫看到板上彈球的各種現象。

四、 動畫實作：

單週期 $e = 0.7$ $\omega = 5$	
雙週期	無

我並未調整到有雙週期發生的數值，所以我只看到了單週期現象。但是我在試驗過程中有發現近似四週期的動畫，非常神奇。而我們下禮拜就是期末最後一次做專題了，主題是鍊條及布料材質模擬，是另一組的題目。

五、 參考資料：

https://vrs.amsi.org.au/wp-content/uploads/sites/78/2020/01/ceddia_julian_vrs-report.pdf?fbclid=IwAR1TkVUeSFwZY62opQgzWNRXZuB9_Sv6a6fXVFbjAtF5V2Z7uxin9t6wyE



國立師大附中 物理專研日誌

姓名：劉穆霖

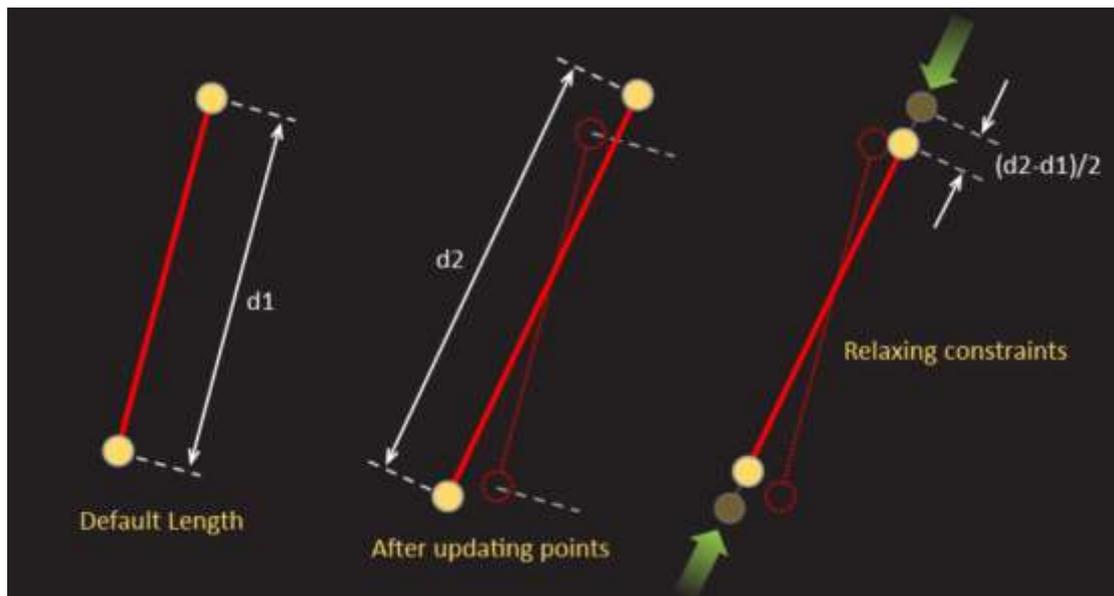
日期：6/24

主題：繩子的動畫模擬與懸鍊線

摘要：

繩子動畫模擬：

理論：將一條繩子看作是許多質點，中間用細線連接，而細線的長度不可伸縮。經過上述模擬，我們就能做出對應的模型來模擬。



上圖為我們做動畫時的主要想法。我們先讓二質點間的細繩隨著重力作用，改變了些許距離(如上圖，二質點距離由 d_1 變為 d_2)。接著再使細繩縮緊，將兩邊長度皆向中心拉 $\frac{d_2-d_1}{2}$ ，就能使距離變回原樣。最後，將兩質點調整，使上方質點變回原本之位置，就結束了一個影格的操作。

我們將繩索上的質點編號 $1\sim N$ ，全部進行上述操作，隨著影格的進行，我們就能看到繩索因重力作用而擺動的動畫。



懸鍊線之介紹：

將繩索二端固定，使其在重力作用下自由垂下，所形成的圖樣即為懸鍊線。最早在文藝復興時期，達文西在製作《抱銀貂的女人》時，就考慮過這個問題。他想為畫出她脖子上的項鍊時，就在思考懸鍊線究竟是哪種曲線。可惜的是他到過世之前都沒能想出此問題。時隔170年後，科學家約翰·伯努利終於解出了這道難題。最後，人們終於找到了懸鍊線的答案——雙曲餘弦函數。

生活上常常可看到懸鍊線，例如大橋上的拱門、碼頭邊護欄懸掛的鐵鍊、沙灘上吊床懸掛的樣貌等，都是懸鍊線在生活上的例子。

道路上的鐵鍊



大橋的拱門



以下為懸鍊線的標準形式： $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ ($\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$)

懸鍊線上只有兩端受拉力，其餘皆為繩子自身受重力而彎曲的結果。

懸鍊線的動畫模擬：



參考資料：

鐵鍊圖片：<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%82%AC%E9%93%BE%E7%BA%BF>

拱門圖片：

<https://zhtw.eferrit.com/%E4%BA%8C%E6%AC%A1%E5%87%BD%E6%95%B8-%E6%8B%8Bhttps://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%82%AC%E9%93%BE%E7%BA%BF%E7%89%A9%E7%B7%9A%E7%9A%84%E8%AE%8A%E5%8C%96/>

心得

這學年度的物理專研課程，老師帶著我們學習各種主題，例如電磁學、光學、聲學等。其中的內容，很多都是在普通高中的物理課內學不到的內容。我在這門課中經歷了很多大大小小的實驗及課程，學到了很多有趣的內容。尤其是在做實驗時，常常會生出許多意想不到的結果。我發現生活中許多看似簡易的現象和情形背後，其實都隱含著深刻的物理規則。當我每次遇到這種情況時，都會不禁感嘆自然的奇妙，在簡單的現象背後居然有著深刻的物理意義。

因此，我也從這項課程內學到許多。我現在設計、製作、分析實驗的能力已更上一層樓了，我也學到如何將資訊科學及物理學連結，利用動畫的製作來實際展示物理現象。而這堂課的內容豐富，也影響了我看各種生活現象的態度。我如今在看到其他有趣的實驗時，也會一併的去思索其背後的原理。並試著實作出相仿的實驗，更加仔細的了解各種現象。